Programme de colle : Semaine 28
Lundi 30 mai

I Algébre linéaire

1. Famille libre, famille génératrice, base
2. Dimension, rang.

3. Application linéaire : définition, exemples. (On se restreindra au cadre des applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
4. Noyau et image.
5. Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
6. Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
7. Lien Noyau/Image et Injectivité/surjectivité.
8. Application bijective / matrice inversible.
9. Rang d'une application linéaire.
10. Théorème du rang.

II Variable aléatoire réelle finie

1. Définition d'une VAR finie.
2. Loi et fonction de répartition.
3. Espérance, variance, formule de Koenig-Huygens.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Manipulation des listes.
2. Recherche de maximum d'une liste.
3. Tri à bulle et tri par insertion.
4. Bibliothèque matplotlib.pyplot et numpy.
5. Tracer de fonction.
6. Somme de Riemann, calcul de limites et approximations des intégrales.
7. Modéliser une expérience aléatoire à l'aide de la bibliothéque random.

IV Exercices Types

1. Pour chacune des applications linéaires suivantes, décrire l'image et le noyau, en déduire si elles sont injectives, surjectives.
   — $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$
   — $f(x, y) = (4x + y, x - y, 2x + 3y)$
   — $f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + 2z, x + 5y - 4z)$
2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de
   $$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$
   définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit surjective ? Injective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

3. On considère f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices relativement à la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   — Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.
   — Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner une base de $\operatorname{Im} f$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im} g$.
   — On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?
4. Un joueur prélève successivement et avec remise n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère les varf X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules tirées. Donner les univers images de X et de Y. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire la loi de X. Calculer ensuite pour tout $k \in Y(\Omega)$: $P([Y > k])$. En déduire la loi de Y.
5. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
   (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
   (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
   (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
6. Deux joueurs jouent n fois chacun à pile ou face.
   (a) Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne un nombre de piles strictement plus grand que l'autre.