Correction : DS 9

Exercice 1. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

Dans cette partie et dans cette partie seulement, on suppose que $c = 0$. C'est-à-dire que l'on effectue ici n tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. (a) Soit N_i l'événement : " tirer une boule blanche au tirage i ". Pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événément $Y = k$ en fonction de $(N_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$
   (b) En déduire la pour $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = k)$
   (c) Calculer enfin $P(Y = 0)$
3. (a) Soit $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k$.
   (b) En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
4. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On revient au cas général et on suppose donc que l'on remet à chaque tirage c boules de la couleur tirée. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer l'univers image de X_2 et pour tout $(x, y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ la valeur de $P(X_1 = x \text{ et } X_2 = y)$.
4. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
5. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
6. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

7. Soit $p \leqslant n-1$.

   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence forte sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Correction 1.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Étude du cas $c=0$. On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

— $Y=k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.

— $Y=0$ si les n boules tirées sont noires.

1. On effectue n tirages indépendants (le contenu de l'urne ne change pas) pour lesquels la probabilité d'obtenir *blanc* est toujours $1/2$ (boules équiprobables). Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1/2)$ et $E(X)=n/2$ et $V(x)=n/4$

2. Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $(Y=k)$ signifie qu'on obtient B pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Donc que l'on a eu N pour les tirages précédents

$$(Y=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1}N_i\cap B_k$$

   et les tirages étants indépendants, .

$$p(Y=k)=\prod_{i=1}^{k-1}p(N_i)\cdot p(B_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

   $(Y=0)$ signifie qu'il n'y a eu que des N lors des n tirages. Et donc $P(Y=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3. Pour calculer cette somme, il faut traiter à part la valeur $k=0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}p(Y=k) &= \sum_{k=1}^{n}P(Y=k)+p(Y=0)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

4. On le démontre par récurrence : Pour $x\neq 1$

— Pour $n=1$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} kx^k &= x \text{ et}\\ \frac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2} &= x\frac{x^2-2x+1}{(1-x)^2}=x\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

— Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k+(n+1)\,x^{n+1}\\ &= (n+1)\,x^{n+1}+\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+1}(1-x)^2+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+1}-2\,(n+1)\,x^{n+2}+(n+1)\,x^{n+3}+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+3}+-(n+2)\,x^{n+2}+x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

— Donc la propriété est vraie pour tout entier $n\geq 1$

5. On a alors

$$\begin{aligned}E\,(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k\cdot p\,(Y=k)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot P(Y=k)+0\cdot p\,(Y=0)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}\\ &= 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}\right)\\ &= -\,(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\end{aligned}$$

Étude du cas $c\neq 0$. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par :

— $X_i=1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$tirage

— $X_i=0$ sinon

On définit alors, pour $2\leqslant p\leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p=\sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. X_i compte le nombre de boule(s) balnches obtenue au $i^{ème}$ tirage (uniquement). Z_p est donc le nombre total de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages.

2. Au premier tirages, les 2 boules sont équiprobables. Donc $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $p(X_1 = 1) = p(X_2 = 1) = 1/2$ et X_1 suit une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. On a don $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/4$
3. Il y a ici 4 probabilités à déterminer en décomposant en fonction du résultat de chacun des deux premiers tirages :
   - $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (N_1 \cap N_2)$ donc $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)\, p(N_2/N1)$.
     Quand on a N_1 on rajoute alors c boules Noires. Il y a donc 1 blanche et c+1 noirs lors du second tirage. Ces boules étant équiprobables :
     $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$
   - De même $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)\, p(B_2/N1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$
   - $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(B_1 \cap N_2) = p(B_1)\, p(N_2/B_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$
   - et enfin $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)\, p(B_2/B1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

   La loi de X_2 est la loi marginale :
   - $p(X_2 = 0) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$
   - $p(X_2 = 1) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

   La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1 et $E(X_2) = E(X_1) = 1/2$
4. Ici Z_2 est la somme de deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre de succès. **Mais** elles ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2)$
   - $Z_2(\Omega) = \{0,1,2\}$
   - $(Z_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ et $p(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$ (d'après la loi du couple)
   - $(Z_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ et comme ces deux parenthèses sont incompatibles :
     $p(Z_2 = 1) = p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$
   - $(Z_2 = 2) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ et $p(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$.
5. On peut avoir en p tirages de 0 à p boules blanches. Donc $Z_p(\Omega) = [[0, p]]$
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Quand $(Z_p = k)$ on a obtenu k boules blanches et $p - k$ boules noires. On a donc rajouté lors de ces tirages $k \cdot c$ boules blanches et $(p - k)\, c$ boules noires.
   Il y a donc $k \cdot c + 1$ blanches et $(p - k)\, c + 1$ noires lors du $p + 1^{ième}$ tirages.
   Ces boules étant équiprobables
   $$p(X_{p+1} = 1 \,/ Z_p = k) = \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2}$$
   (b) Les événements $(Z_p = k)_{k \in [[0,p]]}$ forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} p(X_{p+1} = 1 \,/ Z_p = k) p(Z_p = k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) \ldots \end{aligned}$$

Mais on ne connaît pas la loi de Z_p... Aussi ne fait on apparaître que son espérance :

$$\begin{aligned}
p\left(X_{p+1}=1\right) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c+1}{p \cdot c+2} p\left(Z_p=k\right)=\frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{p}(k \cdot c+1) p\left(Z_p=k\right) \\
&= \frac{1}{pc+2}\left[c \sum_{k=0}^{p} k p\left(Z_p=k\right)+\sum_{k=0}^{p} p\left(Z_p=k\right)\right] \\
&= \frac{1}{pc+2}\left[c E\left(Z_p\right)+1\right]=\frac{c E\left(Z_p\right)+1}{2+pc}
\end{aligned}$$

(c) On en déduit par récurrence que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

— Pour $p=1$, X_1 suit bien une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$

— Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \in [[1, p]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$
  Alors $E\left(Z_p\right)=\sum_{k=1}^{p} E\left(X_i\right)=p/2$
  et

$$\begin{aligned}
p\left(X_{p+1}=1\right) &= \frac{c E\left(Z_p\right)+1}{2+pc}=\frac{\frac{cp}{2}+1}{2+pc}=\frac{cp+2}{2(cp+2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  et donc $p\left(X_{p+1}=0\right)=1-p\left(X_p=1\right)=\frac{1}{2}$
  Donc X_{p+1} suit une loi binomiale de paramètre $1/2$

— Donc pour tout entier $p \geq 1$: X_p suit une loi binomiale de paramètre $1/2$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2=3f-2\,\mathrm{Id}_E . \quad (*)$$

A- Etude d'un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x+2y,-x) \end{array}\right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
3. Soit $F=\ker(g-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.
4. Faire de même avec $G=\ker(g-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
5. Montrer que $F \cap G=\{0\}$
6. Soit $u=(1,-1)$ et $v=(-2,1)$ Montrer que $B=(u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de u et v.
8. Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
9. Donner finalement l'expression de $g^n(x, y)$ en fonction de x et y.
10. Soit A la matrice de g dans la base canonique. Donner la matrice A, puis à l'aide de la question précédente déterminer A^n en fonction de n.

B- Cas général On se place maitenant dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.
3. (a) Exprimer f^3 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.
5. Déterminer enfin f^n en fonction de f et Id.

Correction 2.

1. g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de vérifier que g est linéaire. Pour cela on considère $(x_1, y_1) \in R^2, (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) &= g(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2) \\ &= (3(x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2), -(x_1+\lambda x_2)) \\ &= (3x_1+2y_1+\lambda(3x_2+2y_2), -x_1-lambdax_2)) \\ &= (3x_1+2y_1, -x_1)+\lambda(3x_2+2y_2, -x_2)) \\ &= g(x_1,y_1)+\lambda g(x_2,y_2) \end{aligned}$$

   Ainsi g est linéaire,

$$\boxed{g \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}^2}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} g\circ g(x,y) &= g(3x+2y,-x) \\ &= (3(3x+2y)+2(-x), -(3x+2y)) \\ &= (7x+6y, -3x-2y) \\ &= (9x+6y,-3x)+(-2x,-2y) \\ &= 3(3x+2y,-x)-2(x,y) \\ &= 3g(x,y)-2\,\mathrm{Id}(x,y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } g^2 = 3g-2\,\mathrm{Id}}$$

3.

$$\begin{aligned} F &= \ker(g-\mathrm{Id}) \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)-(x,y)=(0,0)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (2x+2y,-x-y)=(0,0)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+2y=0 \text{ et } x+y=0\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y\} \\ &= \{(-y,y) \mid y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1,1) \mid y\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect((-1,1)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-1,1) \text{ est une base de } F}$$

4.

$$\begin{aligned}
G &= \ker(g - 2\,\mathrm{Id}) \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) - 2(x,y) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x+2y, -x-2y) = (0,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y = 0 \text{ et } -x-2y=0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+2y = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -2y\} \\
&= \{(-2y,y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-2,1) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect((-2,1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-2,1) \text{ est une base de } G}$$

5. Comme F et G sont des espaces vectoriels, $0 \in F$ et $0 \in G$ donc, $\{(0,0)\} \subset F \cap G$.
Soit $u \in F \cap G$, comme $u \in F$ on a $g(u) - u = 0$ et donc $g(u) = u$. Comme $u \in G$ on a $g(u) - 2u = 0$ donc $g(u) = 2u$. Ainsi $u = 2u$ et donc $u = 0$. On a donc $F \cap G \subset \{(0,0)\}$

$$\boxed{\text{Par double inclusion } F \cap G = \{(0,0)\}}$$

6. u et v ne sont pas proportionnels et forment donc une famille libre. Comme $Card((u,v)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, (u,v) est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{(u,v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$$

7. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\lambda u + \mu v = (x,v)$$
On obtient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda - 2\mu & = x \\ -\lambda + \mu & = y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda - 2\mu & = x \\ -\mu & = y + x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = -x - 2y \\ \mu & = -y - x \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a } (-x-2y)u + (-y-z)v = (x,y)}$$

8. Prouvons par récurrence la proposition $P(n)$: "$g^n(u) = u$ et $g^n(v) = 2^n v$"

Initialisation $g(u) = u$ et $g(v) = 2v$ car $u \in F$ et $v \in G$. donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors par HR, $g^n(u) = u$ et $g^n(v) = 2^n v$ donc
$$g^{n+1}(u) = g(g^n(u)) = g(u) = u$$
et
$$g^{n+1}(u) = g(g^n(v)) = g(2^n v) = 2^n g(v) = 2^{n+1} v$$
Ainsi la propriété P est héréditaire,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in N^*, g^n(u) = u \text{ et } g^n(v) = 2^n v}$$

9. D'après la question 7 :

$$g^n(x, y) = g^n((-x - 2y)u + (-y - z)v) = (-x - 2y)g^(u) + (-y - z)g^n(v)$$

D'après la question 8, on a donc

$$g^n(x, y) = (-x - 2y)u + (-x - y)2^n v$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g^n(x, y) &= (-x - 2y)(1, -1) + (-2^n x - 2^n y)(-2, 1) \\ &= (-x - 2y + 2^{n+1}x + 2^{n+1}y, x + 2y - 2^n x - 2^n y) \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\boxed{g^n(x, y) = ((-1 + 2^{n+1})x + (-2 + 2^{n+1})y, (1 - 2^n)x + (2 - 2^n)y)}$$

10. La matrice de g dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question précédente, la matrice de g^n est

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}}$$

B - Cas général.

1. Si f vérifie $(*)$ on a $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc $-f^2 + 3f = 2\,\mathrm{Id}_E$ soit encore

$$f \circ \frac{1}{2}(-f + 3\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}_E$$

$$\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = \tfrac{1}{2}(-f + 3\,\mathrm{Id})}$$

2. Soit $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$ une solution de $(*)$ on a alors $f^2 = \lambda^2\,\mathrm{Id}_E$ et donc

$$\lambda^2\,\mathrm{Id}_E = 3\lambda\,\mathrm{Id}_E - 2\,\mathrm{Id}_E$$

Donc

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\,\mathrm{Id}_E = 0$$

Comme Id_E n'est pas l'application nulle, on a $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ ainsi

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Finalement $\lambda \in \{1, 2\}$

$$\boxed{\text{Les seules solutions de } (*) \text{ de la forme } \lambda\,\mathrm{Id}_E \text{ sont } \mathrm{Id}_E \text{ et } 2\,\mathrm{Id}_E}$$

3. (a) Soit f solution de $(*)$ on a donc $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$, en composant par f on obtient

$$f^3 = 3f^2 - 2f$$

Or $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc

$$\begin{aligned} f^3 &= 3(3f - 2\,\mathrm{Id}_E) - 2f \\ &= 7f - 6\,\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

$$\boxed{f^3 = 7f - 6\,\mathrm{Id}_E}$$

(b) Montrons la propriété par récurrence.
Pour $n = 1$, $f^1 = f$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ satisfont la condition demandée.
Supposons donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Il existe donc (a_n, b_n) tel que $f^n = a_n f + b_n \,\mathrm{Id}_E$ En composant par f on obtient

$$f^{n+1} = a_n f^2 + b_n f$$

Or $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E$ donc

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= a_n(3f - 2\,\mathrm{Id}_E) + b_n f \\ &= (3a_n + b_n)f - 2a_n \,\mathrm{Id}_E \\ &= a_{n+1} f + b_{n+1} \,\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

avec $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } (a_n, b_n) \text{ tel que } f^n = a_n f + b_n \,\mathrm{Id}_E}$$

4. (a) D'après la question précédente $b_{n+1} = -2a_n$ donc $b_n = -2a_{n+1}$. En remettant dans l'équation $a_{n+1} = 3a_n + b_n$, on obtient

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0}$$

(b) On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractérisitique est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les racines sont 1 et 2.
Ainsi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \alpha + \beta 2^n$$

D'après l'initialisation de la récurrence on sait que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + 2\beta = 1$. Tout calcul fait, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = -1 + 2^n}$$

(c) On sait que $b_n = -2a_{n+1}$ donc

$$\boxed{b_n = -1 + 2^{n+1}}$$

Exercice 3 (Extrait du Concours Agro-Veto 2019)**.** Des éléments de syntaxe Python, et en particulier l'usage du module numpy, sont donnés en annexe . Dans tout ce qui suit, les variables n, p, A, M, i, j et c vérifient les conditions suivantes qui ne seront pas rappelées à chaque question :

— n et p sont des entiers naturels tels que $p \geq n \geq 2$;

— A est une matrice carrée à n lignes inversible ;

— M est une matrice à n lignes et p colonnes telle que la sous-matrice carrée constituée des n premières colonnes de M est inversible ;

— i et j sont des entiers tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$;

— c est un réel non nul.

On note $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ l'opération qui ajoute à la ligne i d'une matrice la ligne j multipliée par c.

1. Soit la fonction initialisation :

```python
def initialisation(A):
    n = np.shape(A)[0]
    mat = np.zeros((n,2*n))
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            mat[i,j] = A[i,j]
    return(mat)
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. L'appel initialisation (A) renvoie :

(a) une matrice rectangulaire à n lignes et $2n$ colonnes remplie de zéros ;

(b) une matrice de même taille que A ;

(c) une erreur au niveau d'un range ;

(d) une matrice rectangulaire telle que les n premières colonnes correspondent aux n colonnes de A, et les autres colonnes sont nulles.

2. Les trois fonctions multip, ajout et permut suivantes ne renvoient rien : elles modifient les matrices auxquelles elles s'appliquent.

   (a) Que réalise la fonction multip ?

```python
def multip(M, i, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        M[i,k] = c*M[i,k]
```

   (b) Compléter la fonction ajout, afin qu'elle effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + cL_j$.

```python
def ajout(M, i, j, c):
    p = np.shape(M)[1]
    for k in range(0, p):
        _____ ligne(s) a completer _____
```

   (c) Écrire une fonction permut prenant pour argument M, i et j, et qui modifie M en échangeant les valeurs des lignes i et j.

Dans la suite du sujet, l'expression "opération élémentaire sur les lignes" fera référence à l'utilisation de permut, multip ou ajout.

3. Soit la colonne numéro j dans la matrice M. On cherche le numéro r d'une ligne où est situé le plus grand coefficient (en valeur absolue) de cette colonne parmi les lignes j à $n-1$. Autrement dit, r vérifie :

$$|A[r,j]| = \max\{|A[i,j]| \text{ pour } i \text{ tel que } j \leq i \leq n-1\}.$$

Écrire une fonction `rang_pivot` prenant pour argument M et j, et qui renvoie cette valeur de r. Lorsqu'il y a plusieurs réponses possibles pour r, dire (avec justification) si l'algorithme renvoie le plus petit r, le plus grand r ou un autre choix.

(L'utilisation d'une commande max déjà programmée dans Python est bien sûr proscrite.)

4. Soit la fonction mystere :

```python
def mystere(M):
    n = np.shape(M)[0]
    for j in range(0, n):
        r = rang_pivot(M, j)
        permut(M, r, j)
        for k in range(j+1, n):
            ajout(M, k, j, -M[k,j]/M[j,j])
        print(M)
```

(a) On considère dans cette question l'algorithme mystere appliqué à la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Indiquer combien de fois la ligne print (M) est exécutée ainsi que les différentes valeurs qu'elle affiche

(b) De façon générale, que réalise cet algorithme ?

5. On considère la fonction reduire :

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    #Les lignes suivantes sont \'a compl\'eter :
        ______________________________
```

Compléter la fonction afin que la portion de code manquante effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :
pour j prenant les valeurs $n-1, n-2, \dots, 1$, faire :
pour k prenant les valeurs $j-1, j-2, \dots, 0$, faire :

$$\mathrm{L_k} \leftarrow \mathrm{L_k} - \mathrm{M[k,j]L_j}$$

Indiquer ce que réalise cette fonction.

Annexe

On considère que le module numpy, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via import numpy as np. Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	Interprétation
abs(x)	Valeur absolue du nombre x
M[i, j]	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
np· zeros ((n, p))	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros
T = np.shape(M) T[0] ou np.shape (M)[0] T[1] ou np.shape (M)[1]	Dimensions de la matrice M Nombre de lignes Nombre de colonnes
M[a : b, c : d]	Matrice extraite de M constituée des lignes a à $b-1$ et des colonnes c à $d-1$: si a (resp. c) n'est pas précisé, l'extraction commence à la première ligne (resp. colonne) si b (resp. d) n'est pas précisé, l'extraction finit à la dernière ligne (resp. colonne) incluse

correction DS 9.py

```
01| import numpy as np
02|
03| A=np.array([[3,2,2],[-6,0,12],[1,1,-3]])
04|
05| def initialisation(A):
06|     n=np.shape(A)[0]
07|     mat = np.zeros((n,2*n))
08|     for i in range(0,n):
09|         for j in range(0,n):
10|             mat[i,j]=A[i,j]
11|         for j in range(n,2*n):
12|             if j==n+i:
13|                 mat[i,j]=1
14|
15|     return(mat)
16|
17|
18|
19| # print(initialisation(A))
20| ##Q1
21| #a Faux, la matrice ne contient pas que des 0 car la matrice A est inversible
22| #b Faux, la matrice retournée est de taille n,2n alors que A est n,n
23| #c Faux, il n'y a pas d'erreur
24| #d Vrai, c'est ce que fait l'algorithme à la ligne 10
25|
26| ##Q2
27| def multip(M,i,c):
28|     p=np.shape(M)[1]
29|     for k in range(0,p):
30|         M[i,k]=c*M[i,k]
31|
32| # multip(A,1,12)
33| # print(A)
34|
35| # multip multiplie la ligne i (ou i+1 selon comment on compte) par le réel c
36|
37| def ajout(M,i,j,c):
38|     p=np.shape(M)[1]
39|     for k in range(0,p):
40|         M[i,k]=M[i,k]+c*M[j,k]
41|
42| # ajout(A,2,0,1)
43| # print(A)
44|
45| def permut(M,i,j):
46|     p=np.shape(M)[1]
47|     for k in range(0,p):
48|         M[i,k],M[j,k]=M[j,k], M[i,k] #double affectation
49|
50|
51| ##Q3
52| def rang_pivot(M,j):
53|     n=np.shape(M)[0]
54|     r=j #rang du maximum
55|     m=abs(M[j,j]) #valeur du maximum
56|     for k in range(j,n):
```

```
57|         if abs(M[k,j])>m:
58|             r=k #on actualise le rang
59|             m=abs(M[k,j]) #on actualise le maximum
60|
61|     return(r)
62|
63| print(A)
64| print(rang_pivot(A,0))
65| # retournera le premier pivot car on a mis une inégalité strite à la ligne 51
66|
67| ##Q4
68| def mystere(M):
69|     n=np.shape(M)[0]
70|     for j in range(0,n):
71|         r= rang_pivot(M,j)
72|         permut(M,r,j)
73|         for k in range(j+1,n):
74|             ajout(M,k,j,-M[k,j]/M[j,j])
75|         # print(M)
76|
77|
78| mystere(A)
79| #le print est affiché n fois, donc ici 3 fois pour la matrice n
80| #La fonction mystere echelonne la matrice.
81|
82| ##Q5
83| Aaugmente=initialisation(A)
84|
85| def reduire(M):
86|     n=np.shape(M)[0]
87|     mystere(M)
88|     for i in range(0,n):
89|         multip(M,i,1/M[i,i])
90|     for j in range(n-1,-1,-1):
91|         for k in range(j-1,-1,-1):
92|             ajout(M,k,j,-M[k,j])
93|
94| reduire(Aaugmente)
95| print(Aaugmente)
96| #Reduire permet de transformer A par des opérations élémentaires en la matrice identité. J'ai modifié initialisation, pour que la matrice soit la matrice augmentée et donc que reduire donne l'inverse de A.
```