Révisions

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_1 \in]0,\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2 : 0 < u_n < \frac{\pi}{2}$
2. Déterminer le seul réel vers lequel la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger.
3. Ecrire une fonction Python notée `un` qui prend en argument un réel $u0$ et un entier n et permet de calculer u_n.
4. Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$ alors la suite décroit à partir du rang n_0.
   On pourra pour cela, utiliser une expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}.
5. Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$
6. Conclure en établissant la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. En posant pour $n \geq 1, x_n = \frac{u_n}{n}$, montrer que :

$$(x_{n+1}-x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-n^2}{6}x_n^3$$

   puis que

$$\left(\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

8. En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante $\frac{1}{x_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3}$
   En déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.

Exercice 2. Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n}dt; \quad J_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt; \quad J(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

1. Déterminer $J(x)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est bien définie puis que :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. Ecrire une fonction Python nommée `Jn` qui prend en argument un réel $x \in [-1,1]$ et un entier n et retourne la valeur de $J_n(x)$.
5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1], \ |J(x)-J_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$$

6. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} J_n(x)$
7. A l'aide de Python, proposer une fonction nommée `J` qui prend comme argument un réel $x \in [-1,1]$ et retourne la valeur de $J(x)$ à 10^{-4} près, sans utiliser la fonciton `atan` prédéfinie dans une bibliothèque.

Exercice 3. On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant. L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :

— soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $2/3$;

— soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $1/3$.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ième étape. Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.

1. Donner la loi et l'espérance de X_1.
2. (a) Pour $n \geqslant 1$, justifier que X_n ne prend que des valeurs paires. Expliciter $X_n(\Omega)$.
   (b) Écrire un programme informatique prenant en argument la valeur de n, et retournant les valeurs d'une simulation de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   (c) Soit i tel que $2i \in X_n(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 2i]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction G_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} x^k P(X_n = k) \qquad \text{(avec } 0^0 = 1 \text{ par convention)}$$
   et on admet que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = G_n \circ G_1 = G_1 \circ G_n.$$
   (a) Donner les valeurs de $G_n(1)$ et $G_n'(1)$.
   (b) En déduire une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$.
   (c) Calculer alors l'espérance de X_n en fonction de n.
4. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = P(X_n = 0)$, et soit R l'événement « La population de bactéries finit par s'éteindre. ».
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(G_n(x))^2$.
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_n^2$$
   (c) Montrer que $\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant u_n \leqslant 1/2$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à déterminer.
5. On note $\forall n \in \mathbb{N}, D_n$ l'évènement « la population disparait exactement à l'issue de l'étape $n \gg$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(D_n) = u_n - u_{n-1}$.
   (b) En remarquant que $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$, déterminer alors la probabilité que la population de bactéries s'éteigne.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P\left(X^2-1\right)=P(X-1)P(X+1). \qquad \text{(E)}$$

Partie 1 : Construction d'une suite de racines

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).
3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d=\deg(P)$. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$? Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0=a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1}=u_n^2+2u_n$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est une racine de P.

Partie 2 : Cas réel

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+2x \end{array}$.

5. Préciser le tableau de variation de f puis justifier que $u_1 \in [-1;+\infty[$.
6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) En déduire une contradiction à propos de P.
7. On suppose que $u_1 \in]-1;0[$.
   (a) Déterminer le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)-x \end{array}$.
   (b) En déduire la stricte monotonie, la convergence puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Retrouver la contradiction sur P.
8. Montrer que -1 n'est pas une racine de P. Que vaut u_1?
9. En déduire que l'unique racine de P est 0 .
10. On admet que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ (cf partie suivante pour les volontaires). Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Partie 3 : Cas général Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n+1=(a+1)^{2^n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, r_n=|u_n+1|$.
12. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
13. Discuter suivant les valeurs de $|a+1|$ la monotonie de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. En déduire que $|a+1|=1$.
15. On démontre de même que $|a-1|=1$, ce que l'on admet. A l'aide d'un schéma, en déduire une contradiction.

Exercice 5. On considère la fonction de la variable complexe suivante

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z^2+z+1}{z-1} \end{aligned}$$

où $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ est l'ensemble de définition de f. On définit également $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Préciser $\mathcal{D}$.
2. Calculer $f(2-3i)$.
3. (a) Préciser le module, un argument et la forme algébrique de j.
   (b) Comparer j^2 et $\overline{j}$. Placer j et j^2 sur le cercle trigonométrique.
   (c) Préciser j^3, j^4, j^{2020}.
4. On cherche les zéros de f i.e. les solutions de l'équation $f(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathcal{D}$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est un zéro de f alors $\overline{z}$ est aussi un zéro de f.
   (b) Montrer que j et j^2 sont deux zéros de f.
   (c) Montrer que j et j^2 sont les seuls zéros de f.
5. La fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est-elle bijection ?
6. On souhaite déterminer l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Soit $z \in \mathcal{D}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)\left(|z|^2 - 2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\right) = 0$.
   (b) En déduire que l'image réciproque de $\mathbb{R}$ par f est l'union d'une droite (ou presque...) et d'un cercle que l'on déterminera. Représenter graphiquement cet ensemble.
7. Vérifier que pour tout $z \in \mathcal{D}, f(z) = \frac{z^3-1}{(z-1)^2}$.
8. Soit $z \in \mathbb{U} \cap \mathcal{D}$.
   (a) Déterminer l'ensemble réel E le plus grand possible auquel appartient $\theta = \arg(z)$.
   (b) Montrer alors que
   $$f(z) = -\frac{i}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
   (c) Préciser dans ce cas $\mathrm{Re}(f(z))$.
   (d) Soient $\theta \in]0; \frac{2\pi}{3}]$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que $\left|f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| = \frac{3-t^2}{2t\sqrt{1+t^2}}$.