Chapitre 1 : Nombres réels

Table des matières

I Ensembles

I. 1 Definition et notations

Définition 1. Un ensemble E est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de E
Si a est un élément de E on note $a \in E$.

Définition 2. Un ensemble peut se définir de plusieurs manières différentes :

1. Soit en énumérant tous ces éléments : $E_1 = \{1, 3\}$, $E_2 = \{3, 1)\}$, $E_3 = \{1, 2, 3, ...\}$.
2. Soit à l'aide des notations usuelles : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. On utilisera une $*$ en haut pour désigner ces ensemble privés de 0.
3. Soit enfin en utilisant un autre ensemble F et une propriété P $E = \{x \in F \,|\, x \text{ vérifie } P\}$: $E_4 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 1 < 2\}$ $E_3 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n > 0\}$, $E(y) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 1 + y\}$

La notation entre crochets $\{\ldots\}$ est la notation universellement adoptée par les mathématiciens pour désigner des ensembles. Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, leur ordre ne joue aucun rôle ; ainsi, par exemple, on a $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$. L'ensemble qui ne possède aucun élément est appelé ensemble vide et se note $\emptyset$. Un ensemble avec un seul élément est appelé **singleton**, il est noté $\{a\}$.

Définition 3. Soient E, F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on note $E \subset F$ si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F.

Exemples :

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{N}^* \subset \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 1/2\}$

Pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, on utilisera généralement un raisonnement direct. Par exemple si $E = \{x \in \mathcal{E} \,|\, P(x)\}$, et $F = \{x \in \mathcal{E} \,|\, Q(x)\}$, on pourra adopter une rédaction du type :

Soit $x \in E$. Par définition x vérifie $P(x)$. D'après le théorème Truc, $P(x)$ implique $P'(x)$. Or $P'(x)$ blablabla implique $Q(x)$. Donc $x \in F$.

Définition 4. Soient E, F deux ensembles. On dit que E est égal à F et on note $E = F$ si les eléments de F sont exactement les éléments de E.

Pour montrer que deux ensembles sont égaux on pourra utiliser la double inclusion. $(E \subset F$ et $F \subset E) \iff E = F$.

I. 2 Opérations sur les ensembles

I. 2. a Union, intersection, complémentaire

Définition 5. Soient E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.

- L'union de A et B est notée $A \cup B$ et défini par
$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
- L'intersection de ces deux ensembles est notée $A \cap B$ et défini par
$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.
- Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des élements de E qui ne sont pas dans A :
$$\overline{A} = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$$
- $A \setminus B$ est l'ensemble des élements de A qui ne sont pas dans B
$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}$$

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble E, on définit de même :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \{x \in E \,|\, \text{ il existe } i \in \mathbb{N}_n \text{ tel que } x \in A_i\}$$

noté plus simplement $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \{x \in E \,|\, x \in A_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}_n\},$$

noté plus simplement $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$

Remarques :

- On peut généraliser la définition de l'union et de l'intersection à plusieurs ensembles (et même à une infinité).
- Lorsqu'il y a une ambiguité sur le domaine de référence E, on note parfois $\mathcal{C}_E(A) = \overline{A}$. Faire un dessin pour bien comprendre que $\mathcal{C}_E(A) \neq \mathcal{C}_F(A)$.

Exercice

- On définit $E = \mathbb{R}$, $A =]0,1]$, $B =],2]$ et $C = [-4,]$. Calculer $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $\mathcal{C}_E(A)$, $\mathcal{C}_{[0,1]}(A)$, $A \setminus B$, $B \setminus C$ et $A \setminus C$.
- On définit $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$, $B =]-\infty,-1] \cup]2,+\infty[$ et $C = \mathbb{R} \setminus \{-4,3\}$. Calculer $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$.

Exercice Soient E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E.

- Montrer que $A \subset B \Longrightarrow (A \cup B) \subset (B \cup C)$.
- On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et que $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Proposition 6. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Proposition 7. Lois de Morgan.
Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

I. 2. b Produit cartésien d'ensembles

Un couple est un système ordonné de deux éléments x_1 et x_2, non nécessairement distincts. On le note (x_1, x_2). Il faut faire la distinction entre l'ensemble $\{x_1, x_2\}$ (non ordonné) et le couple (x_1, x_2) où l'ordre est déterminé. Ainsi on a par exemple $\{1,2\} = \{2,1\}$ (égalité d'ensembles), mais les couples $(1,2)$ et $(2,1)$ ne sont pas égaux.

Définition 8. Soient E et F deux ensembles.

- Le produit cartésien de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble de toutes les couples d'éléments tel que x est un élément de E et y un élément de F

$$E \times F = \{(x,y) \,|\, x \in E, y \in F\}$$

- Si $E = F$, on note E^2

Plus généralement, un n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un système ordonné de n objets $x_1, x_2, \ldots, x_n$, non nécessairement distincts. Un 2-uple est donc un couple, un 3-uple s'appelle un triple, etc. Le produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est l'ensemble

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in E_j \text{ pour tout } j \text{ avec } 1 \leq j \leq n\}$$

Exemples :

- $\mathbb{R}^2 =$
- Si $E = F = [0,1]$ alors $E^2 =$
- Si $E = \{0,1\}$ et $F = \{2,3\}$ alors $E \times F =$
- Un facteur sanguin est un couple constitué d'un groupe sanguin et d'un rhésus (par exemple O^-). L'ensemble des facteurs sanguins peut s'écrire $\{O, A, B, AB\} \times \{+, -\}$.

Définition 9. Généralisation à plusieurs ensembles :
Soient $E_1,\ E_2,\ldots,E_n$ des ensembles.

- $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble de toutes les combinaisons $(e_1,...,e_n)$ où e_i est un élément sde E_i, $i \in \{1,...,n\}$.
- $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n.

Remarque : Un élément de E^p est appelé une p-liste de E.

Exemple :

- Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y=0 \ \text{ et } \ x-y+z=0\}$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z=0\}$. Montrer que l'on a : $A \subset B$.

II Nombres réels

Les nombres rationnels permettent d'additioner, soustraire, multiplier et diviser... Pourquoi chercher plus loin ? Le philosophe Hippase de métaponte ($\pm$ 500 av JC.) montre que l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle dont les cotés valent 1, n'est pas un nombre rationnel.

Bien plus tard, Dedekind (1831-1916) et Cantor (1845-1918) proposent une construction des nombres réels de deux manières différentes. Nous ne rentrerons pas dans les détails, mais soulignons qu'un des points importants est l'existence de la borne supérieure (Voir section **??**). L'ensemble $\{x^2 \leq 2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$ n'admet pas de borne supérieure dans l'ensemble des rationnels.

Nous supposerons donc qu'il existe un ensemble, dit des nombre réel, et noté $\mathbb{R}$, qui vérifie les différentes propriétés de cette section.

II. 1 Intervalles

Sur $\mathbb{R}$ il existe un ordre qui permet de comparer deux nombres réels, c'est-à-dire de savoir lequel est supérieur ou égal à l'autre.

Définition 10. Ordre sur $\mathbb{R}$:

- $x < y \iff$ si x est strictement inférieur à y.
- $x \leq y \iff$ si x est inférieur à y ou bien égal.

Définition 11. Intervalle de $\mathbb{R}$: ce sont les ensembles de la forme

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$. Appelé parfois « segment a, b »ou « intervalle fermé a, b ».
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$.
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$.
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$. Appelé parfois « intervalle ouvert a, b ».
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$.
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$.
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$.
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$.
- $]-\infty,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\}$.

où a et b sont deux réels quelconques.

Remarques :

- L'intervalle vide est noté $\emptyset$. Pour tout réel a, on a : $]a,a[=\emptyset$.

II. 2 Règles de calculs

On rappelle les règles de calculs élémentaires suivantes :

Proposition 12. Soit a,b,c,d 4 réels. On a

$$a(b+c)=(b+c)a=ab+ac$$

Si $b\neq 0$ et $d\neq 0$:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Définition 13. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction *puissance* n est notée $\cdot^n:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ et définie par :

$$x^n=x\times x\times ...\times x \quad \text{n fois.}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on définit la fonction puissance $-n$ pour tout $x\neq 0$ par :

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}.$$

Remarque

- Par convention $x^0=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$,
- $0^n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. 0^{-n} n'est pas défini pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Proposition 14. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, non nuls si besoin, pour tout $n,m\in\mathbb{Z}$ on a :

- $(xy)^n=x^ny^n$
- $x^n\times x^m=x^{n+m}$ et $\dfrac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$
- $(x^n)^m=x^{nm}$

Proposition 15. Inégalités remarquables. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Exercice 1. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

- Retrouver $(a-b)^3$.
- Montrer que $ab\leq\frac{1}{2}(a+b)^2\leq a^2+b^2$.

II. 3 Majorant et minorant

Définition 16. Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit majoré si il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in E$, $x\leq M$.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit minoré si il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in E$, $x\geq m$.
Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit borné si il est majoré et minoré.

Soit E un ensemble majoré, un réel $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$ $x \leq M$ s'appelle un majorant de E.

Soit E un ensemble borné, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$:

$$|x| \leq M.$$

Exercice 2. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il est majoré, minoré, borné. Et donner lorsque cela a un sens l'ensemble des majorants et des minorants :

- $A_1 = [1, 2[$
- $B_1 =]-\infty, -1]$
- $C_1 =]2, +\infty[$
- $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- $D = \{2, 4, 6, 9\}$
- $E = \{0, 1\} \cup [2, 3[$

Définition 17. Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de E le plus petit des majorants. On le note $\sup_{x \in E}$.

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de E le plus grand des minorants. On le note $\inf_{x \in E}$.

Théorème 18. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une unique borne supérieure.

Exemples :

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$ est un ensemble majoré. Sa borne supérieure vaut $\sqrt{2}$.

Quantification de la borne supérieure La borne supérieure d'un ensemble majoré est l'unique réel M vérifiant

— $\forall x \in E$, $x \leq M$

— $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in E$, $M - \epsilon < x$

Exercice 3. Montrer l'unicité de la borne supérieure. (Difficile : manipuler les ϵ)

Définition 19. Soit E un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Si la borne supérieure $\sup_{x \in E}$ appartient à E on la note alors $\max_E$ et on l'appelle maximum.

Soit E un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$. Si la borne inférieure $\sup_{x \in E}$ appartient à E on la note alors $\min_E$ et on l'appelle minimum.

Exemples :

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$ est un ensemble minoré. Sa borne supérieure vaut $-\sqrt{2}$, c'est son minimum.

Remarque de culture générale : Tout ce que l'on vient de dire, à part le Théorème 18, s'applique aux nombres rationels et c'est grâce à la propriété de la borne supérieure que l'on contruit formellement les réels :

Définition 20. On appelle ensemble réels, noté $\mathbb{R}$, un ensemble qui contient $\mathbb{Q}$ et tel que :

— $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

— Tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

La définition de la densité signifie qu'entre deux nombres réels on peut toujours trouver un nombre rationel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x < y, \exists q \in \mathbb{Q} \quad x < q < y.$$

III Résolution des (in)-équations

III. 1 Rappel des règles de calculs sur les inégalités

Transitivité :

> **Proposition 21.** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Ajouter (ou soustraire) des deux côtés un même terme conserve les inégalités.

Inégalités et addition :

> **Proposition 22.**
> - Addition d'un même terme : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \leq y \Longleftrightarrow x + z \leq y + z.$
> - Addition des inégalités : $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4, \quad \left.\begin{array}{ccc} x & \leq & y \\ x' & \leq & y' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x + x' \leq y + y'$

> **Définition 23.** On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si pour tout $x, y \in I$,
> $$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{resp. } f(x) \geq f(y)$$

Inégalités et multiplication :

> **Proposition 24.**
> $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \ \leq \ y \ \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, \ \lambda x \leq \lambda y \Leftrightarrow \forall \lambda < 0, \ \lambda x \geq \lambda y$$

⚠ Quand on multiplie une inégalité on vérifie TOUJOURS le signe (et la non nullité) du coefficient multiplicateur. Si on ne le connait pas on ne peut pas assurer l'équivalence des inégalités et la preuve est fausse. Au pire, on peut essayer une disjonction de cas.

Exercice 25. A-t-on $x \leq y$ et $x' \leq y'$ implique $xx' \leq yy'$? Meme question si on suppose $x, y > 0$?

Inégalités et passage à l'inverse :

> **Proposition 26.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
> - Si $x \geq y > 0$ alors $0 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$
> - Si $0 > x \geq y$ alors $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y} < 0$
> - Si $x > 0$ et $y < 0$ alors $\dfrac{1}{y} < 0 < \dfrac{1}{x}$

III. 2 Factorisation

Le maitre mot est la

$$\boxed{\textbf{FACTORISATION}.}$$

Soient f_1, f_2 deux fonctions, dont on connait le signe sur $\mathbb{R}$.

- Supposons $f_1 \geq 0$ sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_1(x) \geq 0$) et $f_1 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus I$.

- Supposons $f_2 \geq 0$ sur un sous-ensemble $J \subset \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, on a $f_2(x) \geq 0$) et $f_2 < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus J$.

Alors on connait le signe de $f_1 \times f_2$ sur $\mathbb{R}$:

— Pour tout $x \in I \cap J$, $f_1(x)f_2(x) \geq 0$.

— Pour tout $x \in I \cap (\mathbb{R} \setminus J) \cup J \cap (\mathbb{R} \setminus I)$, $f_1(x)f_2(x) < 0$.

— Pour tout $x \in (\mathbb{R} \setminus I) \cap (\mathbb{R} \setminus J)$, $f_1(x)f_2(x) > 0$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$\frac{2x}{4x^2-1} \leq \frac{2x+1}{4x^2-4x+1}.$$

Transformer les équations et inéquations pour se ramener à des équations et inéquations de type polynomiale Lorsque l'équation ou l'inéquation n'est pas de type polynomiale (c'est-à-dire avec uniquement des puissances de x au numérateur et au dénominateur), on la transforme pour ne plus avoir ni logarithme, ni exponentielle, ni racine carrée, ni valeur absolue... On récapitule ici les différentes méthodes que l'on peut utiliser.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(\sqrt{x+1}) < \ln(3+x) - \dfrac{1}{2}\ln(2)$
2. $\ln(2x+1) - \ln(x-3) \leq 0$
3. $9^x - 5^{x+2} = 5^x - 3^{2x+1}$
4. $2^{x+3} < 4^{2-x}$
5. $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$
6. $(e - e^{2x})(e^x - 1) > 0$
7. $e^{\frac{x-1}{x+3}} > e^2$
8. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$

Élever au carré :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $a = b \implies a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a = b \iff a^2 = b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ est vrai ....
- $a \leq b \iff a^2 \geq b^2$ est vrai ....

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x+7} = 5 - x$
2. $\sqrt{x^2+2x} < x+1$
3. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geq 5$
4. $\sqrt{2x^2-x-1} > x - \dfrac{1}{2}$
5. $\sqrt{\dfrac{6x-11}{3x-2}} \leq \dfrac{1}{x}$

Utiliser un changement de variable :

Poser un changement de variable de type $X = e^x$, $X = \ln(x)$, $X = a^x$, $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître des termes de type polynomiaux.

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^x + e^{x+1} > e^{2x} + e$
2. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 \leq 0$
3. $x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4 > 0$
4. $e^{3x} - e^{2x} - e^{x+1} + e \leq 0.$
5. $\dfrac{e^x - 1}{e^x - e^2} < \dfrac{1}{e^2}$
6. $2^{4x} - 3 \times 2^{2x+1} + 2^3 < 0$
7. $\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2$

IV Fonctions usuelles

On répertorie ici quelques propriétés de fonctions : valeur absolue, partie entiére et exposants.

IV. 1 Valeur absolue

Définition 27. La fonction *valeur absolue* est notée $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- C'est une trivialité que $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 28. Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$ alors, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration.
1. Evident.
2. Disjonction de cas.
3. Poser $y' = \frac{1}{y}$ et appliquer 1.

□

Proposition 29. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Proposition 30 (Inégalité triangulaire ♥)**.** Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Solution 1 : Disjonction de cas.
Solution 2 : On passe l'inégalité au carré. □

Corollaire Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Démonstration. On pose $x' = x$ et $y' = y - x$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|y| = |x' + y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |y - x|.$$

D'où, $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. L'inégalité $-|y| + |x| \leq |x - y|$, se montre de la même façon en posant $x' = x - y$ et $y' = y$.

□

Enlever les valeurs absolues :

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur.
$\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.

Exercice 8. Résoudre $|x-1| = 2x+3$.

Exercice 9. Résoudre $x^2 = |x|$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver et montrer une formule similaire pour $\max(x,y)$.

Exercice 11. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|-x-1|+4 = |2x+1|-5x+1$
2. $|3-x| > |x+2|$
3. $|x-1|+|x+2| < 3$
4. $|x^2-2x-5| > x-7$

IV. 2 Partie entière

Définition 31. La fonction *partie entière* est notée $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ et définie par :

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Remarques :

- La fonction partie entière est parfois notée $E(\cdot)$. On évitera cette notation afin de ne pas la confondre avec l'espèrance d'une variable aléatoire, cf Chapitre Probabilité.
- La fonction partie entière et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue aux poins entiers.

Exemples :

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$
- $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Proposition 32. ♥ La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n+1.$$

Remarque :

- J'ai choisi de définir la fonction partie entière avec la Définition 31 et de prouver la Proposition 32. On aurait pu faire l'inverse : définir la partie entière de x comme l'unique entier n vérifiant l'équation $n \leq x < n+1$ puis prouver qu'elle vérifie $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 13. Calculer la limite de $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

IV. 3 Exposants, racine carrée

Définition 33. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$.
Ce nombre est appelé racine carrée de x, et est noté $\sqrt{x}$.

Remarques :

- Par définition, pour tout $x \geq 0$ $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}^2 = x$.

Exemples :

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,
$$(\sqrt{x})^2 = x.$$
- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,
$$\sqrt{x^2} = x.$$
- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}}$,
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 14. Résoudre

$$\sqrt{3x-1} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = -x$$