Table des matières

Chapitre 3 : Fonctions réelles usuelles

I Vocabulaire des fonctions réelles

I. 1 Notation et définition

Définition 1. Soit f une fonction. On dit qu'elle est définie sur un ensemble D si pour tout x de D on peut associer une valeur à $f(x)$.

Définition 2. On dit qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I si pour tout $x, y \in I$,

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y) \quad \text{resp. } f(x) \geq f(y)$$

Définition 3. Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition.

1. Image, antécédent :
   - Si $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ est appelée <u>l'image de x par f</u>.
   - Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $b = f(a)$, alors a est <u>un antécédent de b par f</u>.
2. Intervalle stable et point fixe :
   - Soit $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. On dit que I est un intervalle stable par f si <u>$f(I) \subset I$</u>.
   - Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, x est un point fixe de f si <u>$f(x) = x$</u>.

Exercice 4. On définit la fonction f par $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$. Donner son domaine de définition, l'image de $\ln 2$ par f, les antécédents de 0 par f. Donner l'ensemble des points fixes de f et montrer que $[\ln 2, +\infty[$ est un intervalle stable par f.

I. 2 Parité

Définition 5. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f **est paire** si
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f **est impaire** si
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'originie.

Remarque. Lorsqu'une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie indiquée ci-dessus pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples.
- Exemples de fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Exemples de fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 6. Que dire de l'opposée, l'inverse d'une fonction paire (resp. impaire) ?
Que dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) ?
Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Que dire de la composée de deux fonctions paires (resp impaires) ?
Que dire de la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

I. 3 Périodicité

Définition 7. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

- ⋆ $x \in D_f \Longleftrightarrow x + T \in D_f$

  et
- ⋆ $\forall x \in D_f$, $f(x + T) = f(x)$

Graphiquement, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

Remarque. Si f est périodique de période T, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x + kT) = f(x)$
Il suffit de l'étudier et de la tracer sur un intervalle de longueur T puis d'effectuer la translation de vecteur $T\vec{i}$ pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples. Exemples de fonctions périodiques : $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est T périodique.
2. Si g est une fonction périodique de période T et $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, alors $h : x \mapsto g(ax + b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$.
   Application : donner la période des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ et $x \mapsto \tan(3x)$.

Définition 9. Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$.
- On dit que f est majorée sur A si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ f(x) \leq M$
- On dit que f est minorée sur A si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ f(x) \geq m$
- On dit que f est bornée sur A si : f est majorée et minorée.

Remarque. Lorsque l'ensemble A n'est pas mentionné, c'est qu'il s'agit de $\mathcal{D}_f$ tout entier.

Exemples.
- $x \mapsto e^x$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$. Elle est minorée sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto x^2$ est minorée mais pas majorée.
- $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est bornée.

Définition 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$, $A \neq \emptyset$. On pose $E = \{f(x),\ x \in A\}$.
- **Borne supérieure, maximum local, global :**
  - ⋆ Si la fonction f est majorée sur A, on définit : $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup E$.
  - ⋆ Si ce nombre est atteint, c'est-à-dire si : $\exists x_0 \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \leq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur A et on le note $\max\limits_{x \in A} f(x)$.
  - ⋆ Si $A = \mathcal{D}_f$, on parle alors de maximum global . Sinon, on parle de maximum local .
- **Borne inférieure, minimum local, global :**
  - ⋆ Si la fonction f est minorée sur A, on définit $\inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf E$.
  - ⋆ Si ce nombre est atteint, c'est-à-dire si : $\exists x_0 \in A,\ \forall x \in A,\ f(x) \geq f(x_0)$, on dit que $f(x_0)$ est le minimum de f sur A et on le note $\min\limits_{x \in A} f(x)$.
  - ⋆ Si $A = \mathcal{D}_f$, on parle alors de minimum global . Sinon, on parle de minimum local .
- **Extremum local, global :**
  On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathcal{D}_f$, admet un extremum global (resp local) lorsque f admet un maximum ou un minimum global (resp local).

Méthode pour trouver le maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure : Étudier les variations de la fonction.

Exercice 11.
1. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - x$.
2. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : x \mapsto |x(1-x)|$.

Exemple. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}\sin(2\pi x)$. Cette fonction n'admet pas d'extremum global, mais qu'elle admet cependant une infinité d'extrema locaux !

II Fonctions usuelles

On répertorie ici quelques propriétés de fonctions : valeur absolue, partie entiére et exposants.

II. 1 Valeur absolue

Définition 12. La fonction *valeur absolue* est notée $|\cdot|: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- C'est une trivialité que $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 13. Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$ alors, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Démonstration.
1. Evident.
2. Disjonction de cas.
3. Poser $y' = \frac{1}{y}$ et appliquer 1.

□

Proposition 14. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Proposition 15 (Inégalité triangulaire ♥)**.** Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration. Solution 1 : Disjonction de cas.
Solution 2 : On passe l'inégalité au carré. □

Corollaire Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$$

Démonstration. On pose $x' = x$ et $y' = y - x$. On a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$|y| = |x' + y'| \leq |x'| + |y'| = |x| + |y - x|.$$

D'où, $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. L'inégalité $-|y| + |x| \leq |x - y|$, se montre de la même façon en posant $x' = x - y$ et $y' = y$.

□

Enlever les valeurs absolues :

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur.
  $\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.

Exercice 1. Résoudre $|x-1| = 2x+3$.

Exercice 2. Résoudre $x^2 = |x|$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver et montrer une formule similaire pour $\max(x,y)$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|-x-1|+4 = |2x+1|-5x+1$
2. $|3-x| > |x+2|$
3. $|x-1|+|x+2| < 3$
4. $|x^2-2x-5| > x-7$

II. 2 Partie entière

Définition 16. La fonction *partie entière* est notée $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{Z}$ et définie par :

$$\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Remarques :

- La fonction partie entière est parfois notée $E(\cdot)$. On évitera cette notation afin de ne pas la confondre avec l'espèrance d'une variable aléatoire, cf Chapitre Probabilité.
- La fonction partie entière et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle n'est pas continue aux poins entiers.

Exemples :

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$
- $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.2 \rfloor = -3$
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Proposition 17. ♥ La partie entière de $x \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$n \leq x < n+1.$$

Remarque :

- J'ai choisi de définir la fonction partie entière avec la Définition 16 et de prouver la Proposition 17. On aurait pu faire l'inverse : définir la partie entière de x comme l'unique entier n vérifiant l'équation $n \leq x < n+1$ puis prouver qu'elle vérifie $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

II. 3 Fonctions polynomiales

II. 3. a Constante

Définition 18. Soit a un réel et soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a$$

On dit alors que f est la fonction constante égale à a.

II. 3. b Affine

Définition 19. Soit a, b deux réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b$$

On dit alors que f est une fonction affine. On appelle a le coefficient directeur (ou pente) de f et b son ordonnée à l'origine.

Proposition 20. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine. On a alors

— Si $a > 0$, $f(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{-b}{a}$

— Si $a < 0$, $f(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{-b}{a}$

II. 3. c Fonctions du second degré

Définition 21. Soit a, b, c trois réels et $a \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition 22. On appelle discriminant d'une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) == ax^2 + bx + c$, le nombre souvent noté Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Définition 23. On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

Proposition 24. Soit f une fonction polynomiale de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Soit Δ son discriminant. On a alors :

— Si $\Delta > 0$, f admet deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, f admet une unique racine réelle

$$r = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, f n'admet aucune racine réelle (mais des racines complexes...)

Exercice 25. Ecrire un script Python qui permet de résoudre les équations polynomiales de degré 2.

II. 3. d Fonctions polynomiales de degré n

Définition 26. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n+1$ réels avec $a_n \neq 0$. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

On dit alors que f est une fonction polynomiale de degré n.

Définition 27. On appelle racine de f un nombre r tel que $f(r) = 0$

II. 4 Fonction trigonométrique

II. 4. a Définitions

Définition 28. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle unité, à savoir le cercle de centre O et de rayon 1. On dit que $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

Soit θ un réel et M le point de $\mathcal{C}$ tel que θ corresponde à la longueur orientée le long du cercle entre O et M. On dit alors que θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Définition 29. On définit le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle θ par :
- $\cos(\theta)$ est l'abscisse de M
- $\sin(\theta)$ est l'ordonnée de M
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Remarques :
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \cos(\theta) & \leq & 1 \\ -1 & \leq & \sin(\theta) & \leq & 1 \end{array}$$
- La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

Exercice 7. Donner la valeur des nombres suivants :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						
$\tan(x)$						

II. 4. b Formulaire trigonométrique

Relations entre le cosinus, le sinus et la tangente

Théorème 30. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$$

$$\begin{array}{lll}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = \sin(x) & \tan(-x) = -\tan(x) \\
\cos(x+\pi) = -\cos(x) & \sin(x+\pi) = -\sin(x) & \tan(x+\pi) = \tan(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\
\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) & \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) & \tan(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)} \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}
\end{array}$$

A retrouver géométriquement.

Addition des angles

Proposition 31. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$ on a :

- $\cos(a+b) =$

  $\cos(a-b) =$
- $\sin(a+b) =$

  $\sin(a-b) =$
- $\tan(a+b) =$

On retrouvera ces formules grâce aux nombres complexes.

Duplication des angles

Proposition 32. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\
&= 2\cos^2(a) - 1 & \iff \quad \cos^2(a) &= \tfrac{\cos(2a)+1}{2} \\
&= 1 - 2\sin^2(a) & \iff \quad \sin^2(a) &= \tfrac{1-\cos(2a)}{2} \\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 8. Calculer $\cos(\pi/12)$

Transformation de produits en sommes

Proposition 33. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\
\cos a \sin b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 9. Calculer $cos(5\pi/12)$ $(a = \pi/12,\ b = \pi/3)$

Transformation de sommes en produits

Proposition 34. Pour tout $p, q \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos(\tfrac{p-q}{2})\cos(\tfrac{p+q}{2}) \\
\cos p - \cos q &= -2\sin(\tfrac{p-q}{2})\sin(\tfrac{p+q}{2}) \\
\sin p + \sin q &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\
\sin p - \sin q &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})
\end{aligned}$$

Démonstration. □

Exercice 10. Résoudre $\cos(2x) + \cos(4x) = 0$

II. 5 Fonctions ln *et* exp

Théorème 35. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0\, f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0$$

Définition 36. On appelle logarithme népérien et on note ln la fonction f du théorème précédent.

Théorème 37. Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x > 0\, f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Définition 38. On appelle exponentielle et on note exp la fonction f du théorème précédent.

Proposition 39. On a pour tout $x > 0$:

$$\exp(\ln(x)) = x$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

Propriétés du $\ln$, $\exp$ **, puissances :**

Propriétés du logarithme ($a > 0,\ b > 0$) :	Propriétés de l'exponentielle :
• $\ln(ab) =$	• $e^a e^b =$
• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$	• $\frac{e^a}{e^b} =$
• $\ln(a^p) =$	• $(e^a)^b =$
• La fonction logarithme est	• La fonction exponentielle est ....

Les inégalités suivantes sont ultra-classiques et doivent savoir être prouvées :

Proposition 40. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

Pour tout $x > -1$:

$$\ln(x+1) \leq x$$

II. 6 Exposants, racine carrée

Définition 41. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^2 = x$.
Ce nombre est appelé racine carrée de x, et est noté $\sqrt{x}$.

Remarques :

- Par définition, pour tout $x \geq 0$ $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}^2 = x$.

Exemples :

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,

$$(\sqrt{x})^2 = x.$$

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \geq 0}}}$,

$$\sqrt{x^2} = x.$$

- Pour tout $\underline{\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}}$,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Exercice 11. Résoudre

$$\sqrt{3x-1} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = x$$
$$\sqrt{1-3x} = -x$$

Définition 42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^n = x$.
Ce nombre est appelé racine n-éme de x, et est noté $\sqrt[n]{x}$.

Remarques :

- Pour n impair, la racine n-ème est bien définie pour $x < 0$.

Définition 43. Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationel. On défini x^r par $(\sqrt[q]{x})^q$

Enfin on peut définir une puissance pour un exposant réel par la formule suivante :

Proposition 44. Pour tout $x > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ on a

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log(x)).$$

Les règles de calcul associées aux puissances entières s'étendent aux exposants réels :

Proposition 45. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Démonstration. □

Remarque :
Il est parfois plus simple de passer à la notation exponentielle pour faire les calculs. L'exemple le plus flagrant étant le calcul de

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Exercice 12. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 13. ♥ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

III Etude de fonctions

III. 1 Représentations graphiques et domaine d'étude

Définition 46. Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On appelle courbe représentatitve de f (ou graphe), la courbe du plan notée $\mathcal{C}_f$ et définie par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in D\}.$$

Proposition 47. Soient deux fonctions f et g, et soit I un intervalle de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

- Si $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$, les deux fonctions sont égales sur I, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \geq g(x)$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

Définition 48. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f **est paire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f **est impaire** si
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$

    et
  - $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.

  Graphiquement, la courbe représentative de f est symmétrique par rapport à l'origine.

Remarque. Lorsqu'une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier et de la tracer sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ puis d'effectuer la symétrie indiquée ci-dessus pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples.
- Exemples de fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- Exemples de fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 49. Que dire de l'opposée, l'inverse d'une fonction paire (resp. impaire) ?
Que dire de la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) ?
Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Que dire de la composée de deux fonctions paires (resp impaires) ?
Que dire de la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Définition 50. Soit f une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est périodique de période $T > 0$ si

- $\star$ $x \in D_f \Longleftrightarrow x + T \in D_f$

  et
- $\star$ $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$

Graphiquement, la courbe représentative de f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$

Remarque. Si f est périodique de période T, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(x+kT) = f(x)$
Il suffit de l'étudier et de la tracer sur un intervalle de longueur T puis d'effectuer la translation de vecteur $T\vec{i}$ pour obtenir la représentation graphique complète.

Exemples. Exemples de fonctions périodiques : $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor - x$.

Exercice 51. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est T périodique.
2. Si g est une fonction périodique de période T et $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, alors $h : x \mapsto g(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{T}{|a|}$.
   Application : donner la période des fonctions $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ et $x \mapsto \tan(3x)$.

III. 2 Rappel sur la dérivation

Définition 52. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ cette limite.

⚠ Avant tout calcul de dérivée, vous devez justifier que la fonction est bien dérivable. On ne reviendra heureusement que rarement (si ce n'est quasiment jamais) à cette définition.

On vériife une fois pour toute que les fonctions usuelles : $\cos, \sin, \tan, \exp, \ln, x^\alpha$ sont dérivables et ensuites les fonctions que l'on est amenée à étudier seront des sommes, produits, quotients et fractions et composition de ces fonctions usuelles.

III. 2. a Opérations sur les dérivées : Calcul de dérivée

Proposition 53. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.

- ⋆ Le produit uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'$$

- ⋆ Si v ne s'annule pas sur I, alors le quotient de u par v est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

- ⋆ En particulier si v ne s'annule pas sur I, alors l'inverse de v est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$

- ⋆ Si f est une fonction dérivable sur un intervalle J avec $\forall x \in I, g(x) \in J$, alors la composée de f par g est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$$

c'est-à-dire : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

Exemples. Dérivées des composées de référence : soit u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}^\star$.

- La fonction u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- Si $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = \frac{nu'}{u^{n+1}}$$

- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

- Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

- La fonction e^u est dérivable sur I et
$$(e^u)' = u' \times e^u$$
- La fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et
$$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$$
- La fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et
$$(\sin(u))' = u' \cos(u)$$
- Si $\forall x \in I, u(x) \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ alors la fonction $\tan u$ est dérivable sur I et
$$(\tan u)' = u' \frac{1}{\cos^2(u)}$$

Exercice 54. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées :

1. $f(x) = \cos^4(5x)\sin^3(2x)$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{e^{x^2}}$
4. $f(x) = \dfrac{\sin^4(2x)}{\sqrt{x^2-1}}$

III. 2. b Lien avec le sens de variation d'une fonction

Dans la plupart des situations, étudier la monotonie d'une fonction se ramène à étudier le signe de sa dérivée.

Proposition 55. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$.
- f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
- f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Dans le cadre de la monotonie stricte, seule une implication reste valable :

Proposition 56.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $\forall x \in I,\ f'(x) < 0$ (sauf en un nombre fini de points), alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque. Attention, f strictement croissante n'implique pas que la dérivée est partout strictement positive ! Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.

Exercice 57. Étudier les variations des fonctions suivantes : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ et $g(x) = x + 3 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

III. 2. c Équation d'une tangente

Proposition 58. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 alors la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 existe bien et son équation est donnée par
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

⚠ Avant de donner l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0, il ne faut pas oublier de justifier son existence à savoir que la fonction est bien dérivable en x_0.

Exercice 59. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1$.

III. 3 Croissance comparée et limites usuelles

III. 3. a Calculs de limites

Vous devez, pour l'instant :

- Connaître les limites des fonctions usuelles et savoir calculer les limites en utilisant les propriétés sur la somme, le produit, le quotient et la composée de limites. **Tout calcul de limite doit être justifié !**

- Connaître les formes indéterminées.
- Savoir dans des cas simples transformer l'expression pour lever l'indétermination.

III. 3. b Théorèmes sur les limites

Théorème 60. Théorème du monôme de plus haut degré.

- En $\pm\infty$, une fonction polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Théorème 61. Théorème des croissances comparées. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^a(\ln x)^b = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^a e^{bx} = 0$

Remarque. On retiendra que « les puissances l'emportent sur le logarithme, et l'exponentielle l'emporte sur les puissances », mais on ne l'écrira jamais !

Théorème 62. Limites en 0 à connaître :

- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Exercice 63. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^{2x}+1}$
3. $f(x) = \ln(x) - x + 1$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$
5. $f(x) = x\ln(x) - x + m^2x$ avec m paramètre réel.
6. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

III. 3. c Rappels sur les asymptotes :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Asymptotes verticales en un point :

Définition 64. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle du type $[a, x_0[$ ou $]x_0, a]$.
La droite $x = x_0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ si

Asymptotes en $\pm\infty$:

On suppose que f est une fonction définie sur un intervalle du type $[c, +\infty[$ ou $]-\infty, c]$.
Asymptotes horizontales :

Définition 65. Soit b un nombre réel.
La droite $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si :

Asymptotes obliques :

Définition 66. Soient $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}$.
La droite $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si :

Exercice 67. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$
2. $f(x) = x + 3 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{3}x + 2$