Correction - DM1

Exercice 1. (10'+40'+30'=1h20) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$
2. $\dfrac{m}{x-1} \leq \dfrac{1}{x+2}$
3. $\sqrt{2x+m} \geq x+1$

Correction 1.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^2 - (m+1)x + m \geq 0}$:**
Ici le domaine de résolution est $\mathbb{R}$. On calcule le discriminant et on obtient que $\Delta = (m-1)^2$. On étudie donc 2 cas :
   - Cas 1 : si $m = 1$: Alors $\Delta = 0$ et $x = 1$ est la seule solution et $x^2-(m+1)x+m \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \mathbb{R}.}$
   - Cas 2 : si $m \neq 1$: alors $\Delta > 0$ et les deux solutions réelles distinctes sont $x_1 = \dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $x_2 = \dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. On doit donc distinguer deux cas :
     - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient $\boxed{\mathcal{S}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[.}$
     - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient $\boxed{\mathcal{S}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[.}$

—

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{m}{x-1} \leq \dfrac{1}{x+2}}$:**
L'inéquation est définie si $x-1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Sur cet ensemble, on obtient
$$\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{m(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(m-1)+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leq 0.$$
   - Si $m = 1$, l'inéquation à résoudre devient alors
$$\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+2)} \leq 0.$$
Un tableau de signe donne alors : $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} =]-2, 1[}$.
   - Si $m \neq 1$, alors la racine de $x(m-1)+2m+1$ est $\dfrac{2m+1}{1-m}$. Pour pouvoir faire un tableau de signe correct, on doit savoir où elle se situe par rapport à -2 et 1.
     - ⋆ Si $m > 1$.
La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \leq -2$ est justement équivalente à $m > 1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus petite des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m > 1 \Leftrightarrow m-1 > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{2m+1}{1-m}$		-2		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		-	0	+		+		+	
$x+2$		-		-	0	+		+	
$x-1$		-		-		-	0	+	
$\dfrac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		-	0	+	||	-	||	+	

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{m>1} = \left]-\infty, \dfrac{2m+1}{1-m}\right] \cup]-2,1[}$.

⋆ Si $0 \leq m < 1$.
La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \geq 1$ est équivalente à $0 \leq m < 1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus grande des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m < 1 \Leftrightarrow m-1 < 0$:

x	$-\infty$		-2		1		$\dfrac{2m+1}{1-m}$		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		+		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-1$		-		-	0	+		+	
$\dfrac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		+	||	-	||	+	0	-	

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[0,1[} =]-2,1[\cup \left[\dfrac{2m+1}{1-m}, +\infty\right[}$.

⋆ Si $m < 0$.
Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est entre les racines -2 et 1. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m < 0 < 1 \Rightarrow m-1 < 0$:

x	$-\infty$		-2		$\dfrac{2m+1}{1-m}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		+		+	0	-		-	
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-1$		-		-		-	0	+	
$\dfrac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		+	||	-	0	+	||	-	

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_{m<0} = \left]-2, \frac{2m+1}{1-m}\right] \cup]1, +\infty[}$.

—

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{2x+m} \geq x+1$:**

- Domaine de résolution :
  L'inéquation a un sens si : $2x+m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{m}{2}$. Ainsi, $\mathcal{D} = \left[-\frac{m}{2}, +\infty\right[$.
- Résolution :

  ⋆ Cas 1 : $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$:
  L'inéquation est alors toujours vérifiée car une racine carrée est toujours positive.
  Pour trouver l'ensemble solution, il faut alors étudier la position de $-\frac{m}{2}$ par rapport à -1.

  $$-\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow -m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2.$$

  Ainsi, on obtient
  - Si $m \geq 2$, alors $\mathcal{S}_{1,m\geq 2} = \left[-\frac{m}{2}, -1\right[$.
  - Si $m < 2$, alors $\mathcal{S}_{1,m<2} = \emptyset$.

  ⋆ Cas 2 : $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$:
  Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs, on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence et on obtient

  $$\sqrt{2x+m} \geq x+1 \Leftrightarrow 2x+m \geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+1-m \leq 0.$$

  Le discriminant est $\Delta = 4(m-1)$, on a donc
  - Si $m<1$, alors $\Delta<0$ et $\mathcal{S}_{2,m<1} = \emptyset$.
  - Si $m \geq 1$, alors les deux solutions sont $-\sqrt{m-1}$ et $\sqrt{m-1}$. Il faut alors étudier la position de $-\sqrt{m-1}$ par rapport à $-\frac{m}{2}$ et à -1. On a

    $$\begin{aligned} -\sqrt{m-1} \geq -\frac{m}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{m-1} \geq \frac{m}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad m^2-4m+4 \geq 0 \quad \text{car les deux termes sont positifs} \\ &\Leftrightarrow \quad (m-2)^2 \geq 0 \quad \text{toujours vrai.} \end{aligned}$$

    Ainsi, on a, pour $m \geq 1$, $-\sqrt{m-1} \geq -\frac{m}{2}$.
    Un raisonnement analogue montre que

    $$-\sqrt{m-1} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2.$$

  On en déduit les resultats suivants :
  - Si $1 \leq m < 2$, alors $-\sqrt{m-1} > -1$, $-\frac{m}{2} > -1$ et $-\sqrt{m-1} \geq -\frac{m}{2}$, donc $\mathcal{S}_{2,m\in[1,2[} = [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$.
  - Si $m \geq 2$, alors $-\sqrt{m-1} \leq -1$, $-\frac{m}{2} \leq -1$ et $-\sqrt{m-1} \geq -\frac{m}{2}$, donc $\mathcal{S}_{2,m\geq 2} = [-1, \sqrt{m-1}]$.

  ⋆ On peut alors conclure :
  - Si $m<1$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m<1} = \emptyset.}$

- Si $1 \leq m < 2$, alors $\mathcal{S}_{m\in[1,2[} = \emptyset \cup [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$, soit $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[1,2[} = [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]}$.
- Si $m \geq 2$, alors $\mathcal{S}_{m\geq 2} = [-\dfrac{m}{2}, -1[\cup [-1, \sqrt{m-1}]$, soit $\boxed{\mathcal{S}_{m\geq 2} = \left[-\dfrac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right]}$.

—

Exercice 2. (5'+10'+1'+5'+30'+10'=1h01) On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad\quad (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

Correction 2.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E =]\tfrac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a - 1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5} - 1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\tfrac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2} - 1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a $f(1) = \lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5-1} \rfloor = \lfloor 2 - 2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60-1} \rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59} \rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x-1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- ▶ <u>Cas 1 :</u> $2x-1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 5x-1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x-1 > 4x^2-4x+1 \\ &\iff 4x^2-9x+2 < 0 \end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4*4*2 = 81-32 = 49 = 7^2$. $4x^2-9x+2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap [\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- ▶ <u>Cas 2 :</u> $2x-1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- <u>Cas 1 :</u> $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x-1 \leq (2x)^2\\ &\iff 5x-1 \leq 4x^2\\ &\iff 4x^2-5x+1 \geq 0\end{aligned}$$

  Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4*4*1 = 25-16 = 9 = 3^2$. $4x^2-5x+1$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

  Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0,+\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[) \cap [0,+\infty[\cap D_E\\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0,+\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

- <u>Cas 2 :</u> $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1,+\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1,+\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$