DM2

Exercice 1. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Exercice 2. 1. Rappeler la valeur de $R_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^5 - k^5$.
3. A l'aide de la somme téléscopique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5$ donner la valeur de $R_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée)

Exercice 3. On va prouver la formule du binome de Newton par récurrence
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ (et sur votre brouillon faite $n = 3$).
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.$$
3. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1}$$
4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$
5. Conclure.