DS 1

Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+3) = 2\ln(x) + \ln(3)$
2. $\left|x^2 + 6x + 5\right| \leq x + 5$

Exercice 2. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 2^k)$$

Exercice 3. 1. Resoudre l'inéquation suivante :

$$\sqrt{2x^2 - 2} \leq x \quad (E_1)$$

2. A l'aide d'un changement de variable, en déduire les solutions de l'inéquation suivante :

$$\sqrt{2e^{2x} - 2} \leq e^x \quad (E_2)$$

Exercice 4. On considère l'inéquation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{2x+a}{x-4a} \leq \frac{x}{x-2a} \quad (E_a)$$

1. Donner l'ensemble des solutions pour $a = 0$

   Pour la suite on supppose que $a \neq 0$.
2. Donner le domaine de définition de (E_a) en fonction de a.
3. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $(x-4a)(x-2a) \geq 0$.
4. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$.
5. En déduire pour $a > 0$ les solutions de (E_a).

Exercice 5 (D'après Agro 2017)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \ln(u_n + 1) + \ln(2) \end{cases}$$

On rappelle que e désigne l'unique réel vérifiant $\ln(e) = 1$ et que $2 < e < 3$.

1. Justifier que $2\ln(2) \geq 1$ et $\ln(4) + \ln(2) \leq 3$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n \in [1, 3]$$
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leq u_{n+1}$$

Exercice 6. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.

3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

(c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 7. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. `Script1.py`

```python
a=0
b=1
c=a+b
a=3
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

2. `Script2.py`

```python
a=0
b=1
c=a+b
a=3
c=a+c
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

3. `Script3.py`

```python
a=0
b=1
if a>=-1:
  a=2
else:
  a=10
print('a+b=', a+b)
```

4. `Script4.py`

```python
a=0
b=1
if a!=b:
  a=1
else:
  a=2
print('a=',a, 'b=',b)
```

5. `Script5.py`

```python
a=0
b=1
c=2
if a==b:
  a=2
   c=(b+1)**4
else:
  a=b
  c=(b+1)**3
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

6. `Script6.py`

```python
a=0
b=1
c=2
if a==b:
  a=-2
  c=3
elif a<0:
  a=b
  c=4
else:
  a=2
  c=5
c=6
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```