Correction TD 1 - Nombres réels

I Ensembles

Correction 1.

Correction 2.

Correction 3.

II Calculs

Correction 4.

Correction 5.

III Résolution d'équations et d'inéquations :

Correction 6. **Résolution d'équations et d'inéquations avec des polynômes.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0}$:**
   1 est racine évidente et on obtient : $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+5x+6) \geq 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = [-3, -2] \cup [1, +\infty[}$.
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^3 - x^2 - x - 2 < 0}$:**
   2 est racine évidente et on obtient :$x^3 - x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+1) < 0$ et le discriminant de $x^2 + x + 1$ est négatif donc $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, 2[}$.
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0}$:**
   On factorise par $3x - 1$ et on obtient :
   $$(3x-1)(x+2)+(2-6x)(4x+3) > 0 \Leftrightarrow (3x-1)\left[x+2-2(4x+3)\right] > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(-7x-4) > 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{4}{7}, \frac{1}{3}\right[}$.
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{32x^6 - 162x^2 < 0}$:**
   On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2$ et on obtient :
   $$32x^6 - 162x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(16x^4 - 81) < 0 \Leftrightarrow 2x^2(4x^2-9)(4x^2+9) < 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\setminus \{0\}}$.
5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{2x}{4x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}}$:**
   On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$ et $4x^2 - 4x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{2x+1}{(2x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(2x-1)-(2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)} \leq 0.$$

Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[}.$

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$.
On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
$$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)} < 0.$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-2, -1[\cup \left]-1, \frac{4}{5}\right[\cup]1, 2[.}$

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2x^2 - 4x + 2 = 1 - x}$:**
$2x^2 - 4x + 2 = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(x-1)^2 \leq 1}$:**
$(x-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x(x-2) \leq 0$ donc $\boxed{\mathcal{S} = [0, 2]}$.

9. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $2x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
De plus, on a : $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2x(x-2)} \leq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2] \cup]0, 2[}$.

10. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{2x+1}{1+x} \geq \frac{3x-2}{1+x}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$\frac{2x+1}{x+1} \geq \frac{3x-2}{1+x} \Leftrightarrow \frac{-x+3}{1+x} \geq 0$ et un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-1, 3]}$.

11. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\frac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \frac{16x+2}{x+1}}$:**
On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
$\frac{x^2+10x-4}{x-2} \leq \frac{16x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$ donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup [0, 2[}$.

Correction 7. L'ensemble de définition est $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On a pour tout $x \in D_a$:
$$\begin{aligned}(I(a)) &\iff \frac{1}{x-a} - x \geq 0\\ &\iff \frac{1 - x(x-a)}{x-a} \geq 0\\ &\iff \frac{-x^2+ax+1}{x-a} \geq 0\\ &\iff \frac{x^2-ax-1}{x-a} \leq 0\end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - ax - 1$ est $\Delta(a) = a^2 + 4 > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Les racines sont
$$r_+(a) = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \quad \text{et} \quad r_-(a) = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$$

On va résoudre

$$r_+(a) \geq a \qquad (I_+)$$

et

$$r_-(a) \geq a \qquad (I_-)$$

Résolvons (I_+)

$$r_+(a) \geq a \iff \sqrt{a^2+4} \geq a \qquad (1)$$

Si $a \geq 0$, $r_+(a) \geq a \iff a^2+4 \geq a^2$ toujours vrai. Donc $a \geq 0$ solution.
Si $a \leq 0$, a est solution car $\sqrt{a^2+4} \geq 0 \geq a$ Les solutions de (I_+) sont $S_+ = \mathbb{R}$

Les solutions de (I_-) sont $S_- = \emptyset$.

Les solutions de $I(a)$ sont donc données par (tableau de signes)

$$\boxed{]-\infty, r_-(a)] \cup]a, r_+(a)])}$$

Correction 8.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{m(x+2) = 2m(3x-4)}$:**

   - Domaine de résolution : $\mathbb{R}$.
   - On résout par équivalences successives, l'inconnue étant ici x. On obtient ainsi que :

     $$m(x+2) = 2m(3x-4) \Leftrightarrow -5mx = -10m \Leftrightarrow mx = 2m.$$

     On doit donc ici étudier deux cas selon que m est nul ou pas car on ne peut pas diviser une égalité par un nombre nul...

     ⋆ Cas 1 : si $m = 0$: l'équation est alors équivalente à : $0 = 0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=0} = \mathbb{R}}$.

     ⋆ Cas 2 : si $m \neq 0$: l'équation est alors équivalente à : $x = 2$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m\neq 0} = \{2\}}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{(m+1)x + 2 - m = 0}$:**
   Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a :

   $$(m+1)x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)x = m-2.$$

   - Si $m = -1$, l'équation devient $0 = -1-2 = -3$. On obtient donc : $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset}$.
   - Si $m \neq -1$, on peut alors diviser par $m+1 \neq 0$ et on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\neq -1} = \left\{\frac{m-2}{m+1}\right\}}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^{2x} - 2me^x + 1 = 0}$:**
   Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a

   $$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^x \\ \text{et} \\ X^2 - 2mX + 1 = 0. \end{cases}$$

   Étude de l'équation $X^2 - 2mX + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4(m^2-1)$. On fait des cas selon le signe de Δ :

   - Si $m \in]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$, et $\boxed{\mathcal{S}_{m\in]-1,1[} = \emptyset}$.

- Si $m \in \,]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, alors $\Delta \geq 0$. Il existe donc deux solutions réelles (distinctes si $m \neq -1$ et $m \neq 1$ et égale sinon) qui sont

$$X_1 = m + \sqrt{m^2-1} \text{ et } X_2 = m - \sqrt{m^2-1}.$$

Comme $X = e^x$, on doit vérifier si X_1 et X_2 sont bien strictement positives.

  ⋆ Étude de X_1 :

$$X_1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > -m.$$

    ∘ Si $m \in \,]-\infty,-1]$, alors $-m \geq 0$ et on peut passer au carré de chaque côté tout en conservant l'équivalence. Ainsi,

$$\sqrt{m^2-1} > -m \Leftrightarrow m^2-1 > m^2 \Leftrightarrow -1 > 0.$$

    Impossible donc X_1 ne peut pas être solution si $m \in \,]-\infty,-1]$.

    ∘ Si $m \in [1,+\infty[$, alors $-m < 0$ et l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, X_1 est solution si $m \in [1,+\infty[$.

  ⋆ Étude de X_2. On refait un raisonnement analogue et on obtient que si $m \in \,]-\infty,-1]$, X_2 ne peut pas être solution et que si $m \in [1,+\infty[$, X_2 est solution.

On peut donc conclure dans le cas où $m \in]-\infty,-1]$, on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in]-\infty,-1]} = \emptyset}$.

Il nous reste ainsi à finir le cas où $m \in [1,+\infty[$. Dans ce cas, on a vu que X_1 et X_2 sont strictement positifs. On obtient alors en utilisant le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x = m + \sqrt{m^2-1} \\ \text{ou} \\ e^x = m - \sqrt{m^2+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \ln(m + \sqrt{m^2-1}) \\ \text{ou} \\ x = \ln(m - \sqrt{m^2+1}). \end{array}\right.$$

Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[1,+\infty[} = \{\ln(m+\sqrt{m^2-1}), \ln(m-\sqrt{m^2-1})\}}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}}$:**

- Domaine de définition : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
- On passe tout du même côté et on met tout sur le même dénominateur. On obtient :

$$\frac{m+3}{x} = \frac{2m-1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(4-m)x-(m+3)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow (4-m)x-(m+3) = 0.$$

On doit donc étudier des cas :

  ⋆ Cas 1 : si $m = 4$, on obtient : $m + 3 = 0 \Leftrightarrow 7 = 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=4} = \emptyset.}$

  ⋆ Cas 2 : si $m \neq 4$, on obtient $x = \dfrac{m+3}{4-m}$. Il reste alors à vérifier que ce nombre est bien dans le domaine de résolution, à savoir que $\dfrac{m+3}{4-m} \neq 0$ et $\dfrac{m+3}{4-m} \neq 1$.

    ⋆ Si $m = -3$ alors $\dfrac{m+3}{4-m} = 0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=-3} = \emptyset.}$

    ⋆ Si $m = \dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{m+3}{4-m} = 1$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=\frac{1}{2}} = \emptyset.}$

    ⋆ Sinon $\boxed{\mathcal{S}_{m\in\mathbb{R}\setminus\{4,-3,\frac{1}{2}\}} = \left\{\dfrac{m+3}{4-m}\right\}.}$

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x - m = \sqrt{x^2 + mx}}$:**

- Domaine de résolution : L'équation est bien définie si $x^2 + mx \geq 0 \Leftrightarrow x(x+m) \geq 0$. Les racines du polynôme de gauche sont 0 et $-m$. On doit donc distinguer trois cas selon que $m > 0$, $m = 0$ et $m < 0$.
  - ⋆ Cas 1 : si $m > 0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D} =]-\infty, -m] \cup [0, +\infty[$.
  - ⋆ Cas 2 : si $m = 0$:
    On doit résoudre $x^2 \geq 0$ et ainsi : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
  - ⋆ Cas 3 : si $m < 0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D} =]-\infty, 0] \cup [-m, +\infty[$.
- Résolution :
  Lorsque $x - m < 0 \Leftrightarrow x < m$: il n'y a pas de solution car une racine carrée est positive ou nulle. Ainsi on se place dans le cas où $x \geq m$. Dans ce cas là, les deux membres de l'équation sont positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient ainsi :
  $$x - m = \sqrt{x^2 + mx} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = x^2 + mx \Leftrightarrow 3mx = m^2.$$
  On doit alors distinguer deux cas selon que $m = 0$ ou pas :
  - ⋆ Cas 2 : $m = 0$: dans ce cas, on obtient : $x - m = \sqrt{x^2 + mx} \Leftrightarrow x = |x|$ ce qui est vrai si et seulement si $x \geq 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=0} = \mathbb{R}^+}$ car le domaine de résolution est $\mathbb{R}$.
  - ⋆ Cas 1 et Cas 3 : $m \neq 0$: dans ce cas, on peut diviser par m et on obtient :
    $$x - m = \sqrt{x^2 + mx} \Leftrightarrow x = \frac{m}{3}.$$
    Il ne reste plus qu'à regarder si un tel x est dans le domaine de définition, et s'il vérifie bien la condition $x \geq m$.
    - ∘ Cas 1 : si $m > 0$: on a $\frac{m}{3} \in [0, +\infty[\subset \mathcal{D}$. Par contre, cette fois on a $\frac{m}{3} < m$, donc la solution ne convient pas. Ainsi on obtient que $\boxed{\mathcal{S}_{m>0} = \emptyset.}$
    - ∘ Cas 3 : si $m < 0$: on a bien $\frac{m}{3} \in]-\infty, 0] \subset \mathcal{D}$, et d'autre part, on a aussi $\frac{m}{3} \geq m$. On obtient donc que $\boxed{\mathcal{S}_{m<0} = \left\{\frac{m}{3}\right\}.}$

Correction 9. Valeurs de m pour que $\mathbf{mx^2 + (m-2)x + 2m - 2 = 0}$ ait deux racines réelles distinctes :
Il faut que m soit non nul (pour avoir une équation d'ordre 2), et que $\Delta > 0$, à savoir : $-7m^2 + 4m + 4 > 0$.
On étudie le discriminant de ce trinôme en m : on a $\delta = 2 \times 64$. Les racines du trinôme en m sont donc :
$$m_1 = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{7} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{7}.$$
Ainsi, l'équation a deux racines réelles distinctes pour : $\boxed{m \in \left]\frac{2 - 4\sqrt{2}}{7}, \frac{2 + 4\sqrt{2}}{7}\right[\setminus \{0\}}$.

IV Valeur absolue

Correction 10. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2+x}|+\mathbf{2}+\mathbf{2x}=\mathbf{x^2}$:**
   Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :
   - Cas 1 : si $2+x\geq 0$, à savoir si $x\geq -2$. L'équation à résoudre est alors
   $$2+x+2+2x=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$
   Le discriminant d'une telle équation est $\Delta=25$, ainsi, les solutions sont $x_1=-1$ et $x_2=4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathcal{S}_1=\{-1,4\}$.
   - Cas 2, si $2+x\leq 0$, à savoir si $x\leq -2$. L'équation à résoudre est alors
   $$-2-x+2+2x=x^2 \Leftrightarrow x^2-x=0$$
   Les solutions sont $x_1=0$ et $x_2=-1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $]-\infty,-2]$, ainsi $\mathcal{S}_2=\{\emptyset\}$.

   Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1,4\}}$.
2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{x^2}=|\mathbf{x}|$:**
   Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :
   - Cas 1 : si $x\geq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
   $$x^2=x \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0.$$
   L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_1=\{0,1\}$.
   - Cas 2 : si $x\leq 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
   $$x^2=-x \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0.$$
   L'ensemble des solutions est alors $\mathcal{S}_2=\{-1,0\}$.

   Synthèse : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}=\{-1,0,1\}}$.
3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2x-3}|\leq\mathbf{2}$:**
   On fait deux cas selon que $2x-3\geq 0$ ou $2x-3<0$ et on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right].}$
4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{2x+3}|-|-\mathbf{5x+6}|\geq\mathbf{3x+2}$:**
   On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\|2x+3\|$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\|-5x+6\|$		$-5x+6$		$-5x+6$	0	$5x-6$	
$\|2x+3\|-\|-5x+6\|$		$3x-9$		$7x-3$		$-3x+9$	

   On étudie alors les 3 cas et on obtient au final : $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset.}$
5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\mathbf{x^2-1}|\leq\mathbf{2}|\mathbf{x}|$:**
   On commence par faire un tableau récapitulatif des cas :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\|x\|$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\|x^2-1\|$		x^2-1	0	$-x^2+1$		$-x^2+1$	0	x^2-1	

Étude de cas :

- Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1]$:
$$|x^2-1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2-1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2+2x-1 \leq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_1 = [-1-\sqrt{2}, -1]$.
- Cas 2 : si $x \in]-1, 0[$:
$$|x^2-1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2+1 \leq -2x \Leftrightarrow x^2-2x-1 \geq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_2 =]-1, 1-\sqrt{2}]$.
- Cas 3 : si $x \in [0, 1]$:
$$|x^2-1| \leq 2|x| \Leftrightarrow -x^2+1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2+2x-1 \geq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_3 = [-1+\sqrt{2}, 1]$.
- Cas 4 : si $x \in]1, +\infty[$:
$$|x^2-1| \leq 2|x| \Leftrightarrow x^2-1 \leq 2x \Leftrightarrow x^2-2x-1 \leq 0.$$
Ainsi $\mathcal{S}_4 =]1, 1+\sqrt{2}]$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathcal{S} = [-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $||\mathbf{x}|-\mathbf{5}| \geq ||\mathbf{3x}|-\mathbf{3}|$:**
On commence toujours par se débarasser des valeurs absolues à l'intérieur :
   - Si $x \geq 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |x-5| \geq |3x-3|$. Ici soit on refait des cas sur les signes de $x-5$ et $3x-3$, soit on élève au carré car les valeurs absolues sont positives. On applique la deuxième méthode :
$$(6) \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq (3x-3)^2 \Leftrightarrow -8x^2+8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+x+2 \geq 0$$
On trouve alors $x \in [-1, 2]$. Attention, il faut aussi dans ce premier cas que x soit positif : au final, $S_1 = [0, 2]$.
   - Si $x < 0$: On a alors : (6) $\Leftrightarrow |-x-5| \geq |-3x-3|$. On élève au carré car les valeurs absolues sont positives :
$$(6) \Leftrightarrow (-x-5)^2 \geq (-3x-3)^2 \Leftrightarrow -8x^2-8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2-x+2 \geq 0$$
On trouve $x \in [-2, 1]$, mais comme on doit avoir $x < 0$ dans ce deuxième cas, on a $S_2 = [-2, 0[$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = S_1 \cup S_2 = [-2, 2]}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x^2-x-2}} \geq |\mathbf{3x+2}|$:**
   - Domaine de définition : L'inéqution est bien définie si $x^2-x-2 \geq 0$. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.
   - Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\lvert 3x+2\rvert$		$-3x-2$	0	$3x+2$	

- Étude de cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right]$: on se place donc sur $]-\infty, -1]$:
    On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq -3x-2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
    $$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
    Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$: on se place donc sur $[2, +\infty[$:
    On doit alors résoudre $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$. Les deux termes sont bien positifs donc on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient :
    $$\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2| \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 9x^2+12x+4 \Leftrightarrow 8x^2+13x+6 \leq 0.$$
    Le discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$. Ainsi $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{\dfrac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1}$:**

- Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si $|x^2-1|+1 \neq 0$. Ce qui est toujours le cas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$-x^2+1$	0	x^2-1	

- Étude de cas :
  - ⋆ Cas 1 : si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$:
    $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
    Ainsi $\mathcal{S}_1 = [1, +\infty[$.
  - ⋆ Cas 2 : si $x \in]-1, 1[$:
    $$\frac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{2}x}{-x^2+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x\sqrt{2}-2}{2-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
    Un tableau de signe avec le signe du numérateur (les racines du numérateur étant $-\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$) et celui du dénominateur donne : $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[.}$

V Partie entière

Correction 11. Video

Correction 12.

1. Seule la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}_+$ ainsi (E) est bien définie pour tout x tel que $5x-1 \geq 0$ c'est-à-dire

$$\boxed{D_E =]\tfrac{1}{5}, +\infty[}$$

2. Cours

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad a-1 < \lfloor a \rfloor \leq a}$$

3. Notons $f(x) = \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor$ On a $f(\frac{1}{5}) = \left\lfloor 2\frac{1}{5} - \sqrt{5\frac{1}{5}-1} \right\rfloor = \lfloor 2\frac{1}{5} \rfloor = 0$ Donc

$$\boxed{\tfrac{1}{5} \text{ est solution de } E}$$

On a $f(\frac{1}{2}) = \left\lfloor 2\frac{1}{2} - \sqrt{5\frac{1}{2}-1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right\rfloor$ Or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sqrt{\frac{3}{2}} > \sqrt{1} = 1$ et donc $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} < 0$ ainsi

$$\boxed{\tfrac{1}{2} \text{ n'est pas solution de } E}$$

On a $f(1) = \lfloor 2 \times 1 - \sqrt{5-1} \rfloor = \lfloor 2-2 \rfloor = \lfloor 0 \rfloor$

$$\boxed{1 \text{ est solution de } E}$$

On a $f(12) = \lfloor 2 \times 12 - \sqrt{60-1} \rfloor = \lfloor 24 - \sqrt{59} \rfloor$ Or$59 < 64 = 8^2$ donc $\sqrt{59} < 8$ et $24 - \sqrt{59} > 24 - 8 = 16$ ainsi $f(2) > 16$ et

$$\boxed{12 \text{ n'est pas solution de } E}$$

4. D'après ce qu'on vient de voir, pour tout $x \in D_E$ on a :

$$2x - \sqrt{5x-1} - 1 < \lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor \leq 2x - \sqrt{5x-1}$$

Si x est solution de (E) on a $\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \rfloor = 0$ et donc l'équation (E) équivaut à $2x - \sqrt{5x-1} - 1 < 0 \leq 2x - \sqrt{5x-1}$, soit

$$\boxed{\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad\quad (E_2) \end{cases}}$$

5. Résolvons ces deux inéquations. Tout d'abord la première :

$$\sqrt{5x-1} > 2x-1 \quad (E_1)$$

On distingue deux cas :

- <u>Cas 1 :</u> $2x-1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq \frac{1}{2}$
Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 5x-1 > (2x-1)^2 \\ &\iff 5x-1 > 4x^2-4x+1 \\ &\iff 4x^2-9x+2 < 0 \end{aligned}$$

Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 9^2 - 4*4*2 = 81 - 32 = 49 = 7^2$. $4x^2 - 9x + 2$ admet donc deux racines

$$r_1 = \frac{9+7}{8} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$$

Ainsi les solutions de (E_1) sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &=]\frac{1}{4}, 2[\cap[\frac{1}{2}, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{2}, 2[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } [\tfrac{1}{2}, +\infty[\text{ sont } \mathcal{S}_1 = [\tfrac{1}{2}, 2[}$$

- Cas 2 : $2x - 1 < 0$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}$
  Dans ce cas, tous les réels $x \in D_E$ sont solutions car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

  $$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur }]-\infty, \tfrac{1}{2}[\text{ sont } \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}]}$$

  En conclusion :

  $$\boxed{\text{Les solutions de } (E_1) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_1' = [\tfrac{1}{5}, 2[}$$

On fait la même chose pour (E_2)

$$\sqrt{5x-1} \leq 2x \quad (E_2)$$

On distingue deux cas :

- Cas 1 : $2x \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 0$
  Alors on peut passer au carré dans l'équation car les deux cotés sont du même signe. On a alors :

  $$\begin{aligned}(E_1) &\iff 5x - 1 \leq (2x)^2 \\ &\iff 5x - 1 \leq 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - 5x + 1 \geq 0\end{aligned}$$

  Un petit discriminant comme on aime : $\Delta = 5^2 - 4*4*1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. $4x^2 - 5x + 1$ admet donc deux racines

  $$r_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

  Ainsi les solutions de (E_2) sur $[0, +\infty[$ sont

  $$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= (]-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [0, +\infty[\cap D_E \\ &= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } [0, +\infty[\text{ sont } \mathcal{E}_2 = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

- Cas 2 : $2x < 0$ c'est-à-dire $x < 0$
  Dans ce cas, aucun réel n'est solution car le membre de gauche est positif et celui de droite négatif.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ sont } \mathcal{E}_2' = \emptyset}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_2) \text{ sur } D_E \text{ sont } \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_2' = [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, +\infty[}$$

6. x est solution de (E) si et seulement si il est solution de (E_1) et (E_2), l'ensemble des solutions correspond donc à l'intersection : $\mathcal{E} \cap \mathcal{S} = ([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty[) \cap [\frac{1}{5}, 2[= [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup [1, 2[$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont } [\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[}$$

Correction 13.
Soit $x, y \in \mathbb{R}^2$ et $k = \lfloor x \rfloor$. On a donc $x \in [k, k+1[$. Il y a maintenant deux cas possibles

Cas 1 : $y \in [k, k+1[$ alors $\lfloor y \rfloor = k$ et donc $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.

Cas 3 : $y \notin [k, k+1[$ Comme $y \geq x$, on a $y > k+1$ et comme $\lfloor y \rfloor > y - 1$ on a $\lfloor y \rfloor > k = \lfloor x \rfloor$
On a ainsi montré que la fonction était croissante.

Correction 14. Distinguons les cas selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Cas 1 : $\lfloor x \rfloor$ est paire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k, 2k+1[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k, k+\frac{1}{2}[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$, donc de nouveau $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k$
On a bien l'égalité demandée.

Cas 2 : $\lfloor x \rfloor$ est impaire Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lfloor x \rfloor \in [2k+1, 2k+2[$, où $\lfloor x \rfloor = 2k+1$. On a alors $\frac{x}{2} \in [k+\frac{1}{2}, k+1[$ donc $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = k$ et $\frac{x+1}{2} \in [k+1, k+\frac{3}{2}$, donc cette fois $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k+1$
On a bien l'égalité demandée.

VI Racine carrée

Correction 15.

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x+1}} = \mathbf{x-1}$:**

   ⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D} = [-1, +\infty[$

   ⋆ Attention, pour pouvoir élever au carré, il faut que les termes des deux côtés soient du même signe ! Il faut toujours faire des cas :
   - Cas 1 : si $x < 1$: on ne peut pas élever au carré.
     Une racine carrée étant toujours positive, on a $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.
   - Cas 2 : si $x \geq 1$: on peut passer au carrée dans l'égalité tout en conservant l'équivalence, les deux membres étant positifs. On obtient comme résultat $x = 0$ ou $x = 3$. Or, on est sous l'hypothèse $x \geq 1$ donc $\mathcal{S}_2 = \{3\}$.

   Synthèse : on a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x+4}} + \sqrt{\mathbf{x+2}} \leq \mathbf{1}$:**

   ⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D} = [-2, +\infty[$.

⋆ Les deux termes étant positifs, on peut passer au carré dans l'inégalité tout en conservant l'équivalence et on obtient

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)(x+2)}\leq -\frac{5}{2}-x.$$

Il faut ensuite faire deux cas :

- Cas 1 : si $x>-\dfrac{5}{2}$: on ne peut pas élever au carré.
Comme une racine est toujours supérieure ou égale à 0, on obtient $\mathcal{S}_1=\emptyset$.
- Cas 2 : si $x\leq -\dfrac{5}{2}$: impossible car $\mathcal{D}=[-2,+\infty[$ donc $\mathcal{S}_2=\emptyset$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x^2-3}}>\mathbf{5x-9}$:**

⋆ Domaine de définition : $\mathcal{D}=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty[$.

⋆ On fait deux cas pour élever au carré :

- Cas 1 : Si $x\leq\dfrac{9}{5}$: on ne peut pas élever au carré.

  Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, on obtient $\mathcal{S}_1=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup\left[\sqrt{3},\dfrac{9}{5}\right]$.
- Cas 2 : Si $x>\dfrac{9}{5}$.
Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient

$$\sqrt{x^2-3}>5x-9\Leftrightarrow 4x^2-15x+14<0.$$

  Les racines sont alors $\dfrac{7}{4}$ et 2. L'ensemble solution est alors pour ce cas, en n'oubliant pas de regarder à la fois le domaine de définition et l'hypothèse $x>\dfrac{9}{5}$, $\mathcal{S}_2=\left]\dfrac{9}{5},2\right[$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2[}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{e^x-1}\geq\sqrt{\mathbf{e^{x+1}-e^x-e+1}}$:**

⋆ Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si

$$e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow (e-1)e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq\frac{e-1}{e-1}$$

car $e-1>0$. Ainsi on obtient que : $e^{x+1}-e^x-e+1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$ en composant par la fonction $\ln$ qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$.

⋆ On peut remarquer que sur $\mathcal{D}$, on a toujours $e^x-1\geq 0$. Ainsi les deux termes de l'inéquation sont toujours positifs et on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow e^{2x}-(1+e)e^x+e\geq 0.$$

On pose alors $X=e^x$ et on doit résoudre $X^2-(1+e)X+e\geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta=(e-1)^2$ et les racines sont 1 et e. Ainsi on obtient :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow e^x\leq 1 \text{ ou } e^x\geq e\Leftrightarrow x\leq 0 \text{ ou } x\geq 1$$

en composant par la fonction $\ln$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme $\mathcal{D}=\mathbb{R}^+$, on obtient que :

$$e^x-1\geq\sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x\geq 1.$$

* ⋆ Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [1, +\infty[\cup \{0\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{3})(\mathbf{x}-\mathbf{1})} \geq \mathbf{2x}-\mathbf{1}$:**

   * ⋆ Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si $(x+3)(x-1) \geq 0$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -3 et 1. Ainsi $\mathcal{D} =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
   * ⋆ On étudie deux cas :
     * Cas 1 : si $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$: on ne peut pas élever au carré.

       On se place donc sur $]-\infty, -3]$. Comme une racine carrée est un nombre positif ou nul, elle est bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Ainsi l'inégalité est toujours vérifiée sur cet ensemble et on obtient que $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -3]$.
     * Cas 2 : si $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

       On se place donc sur $[1, +\infty[$. Les deux termes sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :

       $$\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 \leq 0.$$

       Le discriminant vaut $\Delta = -12$ et ainsi pour tout x, on a : $3x^2 - 6x + 4 > 0$. Donc $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.

   Synthèse : on a $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -3]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{\mathbf{x}+\mathbf{4}} - \sqrt{\mathbf{x}+\mathbf{2}} = \mathbf{1}$:**

   * ⋆ Domaine de définition $\mathcal{D} = [-2, +\infty[$
   * ⋆ On utilise ici la forme conjuguée, c'est-à-dire on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité strictement positive $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}$. On obtient alors l'équation équivalente à résoudre

     $$\frac{2}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}} = 1 \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}.$$

   On est ainsi ramené à pratiquement la même équation que tout à l'heure que je vous laisse résoudre. On obtient $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{4}\right\}.}$

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{1} \leq \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{3}}{\mathbf{x}-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{9}$:**

   * ⋆ Domaine de définition $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   * ⋆ La racine carrée est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et tous les termes de l'inéquation sont bien positifs, on peut donc composer par la racine carrée. On obtient (ATTENTION $\sqrt{a^2} = |a|$),

     $$1 \leq \left|\frac{x-3}{x-1}\right| \leq 3.$$

   On fait alors deux cas pour enlever les valeurs absolues :
     * Cas 1 : $\frac{x-3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$.

       On doit alors résoudre l'inéquation $1 \leq \frac{x-3}{x-1} \leq 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1 \leq \frac{x-3}{x-1}$ et $\frac{x-3}{x-1} \leq 3$. La résolution de la première inéquation donne

       $$\frac{x-3}{x-1} \geq 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{-2}{x-1} \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x - 1 \leq 0.$$

Le premier ensemble solution est ainsi $]-\infty,1]$. La deuxième inéquation donne

$$\frac{x-3}{x-1} \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-3}{x-1} - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x}{x-1} \leq 0.$$

Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $]-\infty,0] \cup [3,+\infty[$.
On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]-\infty,1[\cup[3,+\infty[$, que $\mathcal{S}_1 =]-\infty,0]$.

- Cas 2 : $\frac{x-3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]1,3]$.
  On doit alors résoudre l'inéquation $1 \leq -\frac{x-3}{x-1} \leq 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1 \leq \frac{3-x}{x-1}$ et $\frac{3-x}{x-1} \leq 3$. La résolution de la première inéquation donne

$$\frac{3-x}{x-1} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x+4}{x-1} \geq 0.$$

  Un tableau de signe permet de trouver le premier ensemble de définition. Le premier ensemble solution est ainsi $]1,2]$. La deuxième inéquation donne

$$\frac{3-x}{x-1} \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{3-x}{x-1} - 3 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2x+3}{x-1} \leq 0.$$

  Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $\left[\frac{3}{2},3\right]$.
  On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]1,3]$, que $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{3}{2},2\right]$.

Synthèse : l'ensemble des solutions correspond alors à la réunion des deux sous-ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,0] \cup \left[\frac{3}{2},2\right]}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sqrt{9^x-1} > 3^x-2$:**

⋆ Domaine de définition : L'inéquation est bien définie si : $9^x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x\ln 9} \geq 1 \Leftrightarrow x\ln 9 \geq 0$ en composant par la fonction ln qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi comme $\ln 9 > 0$, on obtient que : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$.

⋆ On doit ensuite étudier deux cas :

- Cas 1 : si $3^x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 2}{\ln 3}$: on ne peut pas élever au carré.
  On se place donc sur $\left[0,\frac{\ln 2}{\ln 3}\right[$. Sur cet ensemble l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est un nombre positif ou nul et elle est donc bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Donc $\mathcal{S}_1 = \left[0,\frac{\ln 2}{\ln 3}\right[$.

- Cas 2 : si $3^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}$.
  On se place donc sur $\left[\frac{\ln 2}{\ln 3},+\infty\right[$. Sur cet ensemble, les deux termes sont positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. Ainsi on obtient que :

$$\sqrt{9^x-1} > 3^x-2 \Leftrightarrow 9^x-1 > 3^{2x} - 4\times 3^x + 4 \Leftrightarrow 4\times 3^x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln 3}$$

en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3 > 0$. Or on est sur $\left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$ et comme $\dfrac{5}{4} < 2$ et que la fonction ln est strictement croissante, on obtient que $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{\ln 3} < \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, on obtient que : $\mathcal{S}_2 = \left[\dfrac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right[$.

Synthèse : $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}^+}$.

Correction 16.

1. **Valeurs de a pour que R(a) soit bien défini :**
Pour que $R(a)$ soit bien définie, il faut déjà que $a-1 \geq 0$, c'est-à-dire que $a \geq 1$. On suppose donc que $a \geq 1$. Sous cette hypothèse, on a donc que $a+2\sqrt{a-1} > 0$ comme somme d'un terme strictement positif et d'un autre terme positif. Il reste à étudier $a-2\sqrt{a-1}$.
$$a - 2\sqrt{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a-1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0.$$
On est passé au carré tout en conservant l'équivalence car les deux termes sont bien positifs. Le discriminant de la dernière inéquation est strictement négatif ($\Delta = -4$) et ainsi, on a $a^2-2a+1 > 0$, d'où $a - 2\sqrt{a-1} > 0$. Finalement, on obtient
$$\boxed{\mathcal{D}_R = [1, +\infty[.}$$

2. **Simplifions R(a) :**
On suppose donc que $a \geq 1$. Ainsi, $R(a)$ a bien un sens et on peut calculer $R(a)^2$. On obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-4a+4} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2} = 2a + 2|a-2|.$$
Ainsi, si $1 \leq a \leq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2(-a+2) = 4 \quad \text{donc} \quad R(a) = 2$$
car $R(a) = -2$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées). Et si $a \geq 2$, on obtient
$$R(a)^2 = 2a + 2(a-2) = 4(a-1) \quad \text{donc} \quad R(a) = 2\sqrt{a-1}$$
car $R(a) = -2\sqrt{a-1}$ est impossible car $R(a)$ est un nombre positif comme somme de deux nombres positifs (somme de deux racines carrées).
On a donc obtenu :
$$\boxed{\forall a \geq 1,\ R(a) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}}$$

VII Fonctions majorées, minorées, bornées

Correction 17. Voir en ligne.

Correction 18. Seule une étude des variations de la fonction assure que les bornes trouvées sont bien optimales.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Ainsi elle est en particulier bien définie sur $[0, +\infty[$.

- Limites aux bornes : $f(0)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ par propriétés sur les somme et quotient de limite.
- Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x\geq 0$, on a : $f'(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Ainsi : $f'(x)<0$ pour tout $x\geq 0$.
- Tableau des variations :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

- Étude des extrema : la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$, et $f(0)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}^+$. On obtient : $\sup_{[0,+\infty[} f=\max_{[0,+\infty[} f=1$ et $\inf_{[0,+\infty[} f=0$.

2. $f : x\mapsto \cos x+\sin x$ sur $\mathbb{R}$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Étude de la périodicité :
     - ⋆ $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $x+2\pi\in\mathcal{D}_f$.
     - ⋆ Soit $x\in\mathcal{D}_f$: $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\cos(x+2\pi)=\sin x+\cos x=f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique. Ainsi on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple : $[-\pi,\pi]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x+\cos x$.
     On étudie alors le signe de f sur $[-\pi,\pi[$: on reconnaît une expression de la forme : $a\cos x+b\sin x$, on obtient donc : $f'(x)=\sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
     Étude du signe : on a
     $$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$
     On peux alors faire un cercle trigonométrique et on voit alors que sur $[-\pi,\pi[$, on a : $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.
   - Tableau des variations :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

   - Étude des extrema : on a f décroissante sur $\left[-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, donc f admet un minimum en $-\frac{3\pi}{4}$ qui vaut $-\sqrt{2}$. De même, f admet un minimum en $\frac{\pi}{4}$ qui vaut $\sqrt{2}$. La fonction f est donc bornée sur $[-\pi, \pi]$: elle est majorée par $\sqrt{2}$ et minorée par $-\sqrt{2}$. Comme ces deux nombres sont atteints, on obtient : $\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = \sqrt{2}$ et $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = -\sqrt{2}$. On utilise ici aussi la 2π périodicité de f pour passer de l'intervalle $[-\pi, \pi[$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$.
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $1+\ln x \neq 0$. On obtient ainsi : $1 + \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{-1} < 1$, la fonction f est donc en particulier bien définie sur $[1, +\infty[$.
   - Limites aux bornes : on a : $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par propriété sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 1$, on a en particulier : $f'(x) = \dfrac{-1}{x(1+\ln x)^2}$. Comme on est sur $[1, +\infty[$, on a : $x > 0$. Ainsi comme un carré est toujours positif, on obtient : $f'(x) < 0$.
   - Tableau des variations :

x	1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

   - Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée par 1 et minorée par 0. Comme $1 = f(1)$, 1 est atteint et ainsi c'est le maximum de f sur $[1, +\infty[$: $\sup_{[1,+\infty[} f = \max_{[1,+\infty[} f = 1$. Le nombre 0 n'est jamais atteint car c'est une limite et ainsi, on obtient 0 est la borne inférieure de f sur $[1, +\infty[$ mais il n'y a pas de minimum.

4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ et en particulier f est bien définie sur $[1, 6]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 1 - \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2}$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les racines sont 2 et 3.
   - Tableau des variations :

x	0		1		2		3		6		$+\infty$
$f'(x)$				$-$	0	$+$	0		$-$		
f		$\searrow$	5	$\searrow$	$5\ln 2 + 1$	$\nearrow$	$5\ln 3 - 1$	$\searrow$	$5\ln(6) - 5$	$\searrow$	

   - Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée et minorée sur $[1, 6]$. Comme $5\ln 3 - 1 \leq 5$, on obtient que $\sup_{[1,6]} f = \max_{[1,6]} f = 5$. Et comme $5\ln 2 + 1 > 5\ln 6 - 5$, on a : $\inf_{[1,6]} f = \min_{[1,6]} f = 5\ln 6 - 5$.