Correction TD 3 - Fonctions usuelles réelles

I Ensemble de définition

Correction 1.

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$: la fonction f est bien définie si et seulement si $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$. La fonction f est bien définie si et seulement si : $x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}}$.
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$. La fonction f est bien définie si et seulement si $x - 3 \geq 0$, $5 + x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_f = [3, +\infty[}$.
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}}$.
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4} > 0$ et $x + 4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-4, 2[}$.

Correction 2. La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - ⋆ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - ⋆ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathcal{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

Correction 3.

1. - Étude de $f \circ g$:
     - ⋆ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{f \circ g} = [3, +\infty[}$.
     - ⋆ Expression : Pour tout $x \geq 3$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 - (g(x)) + 1 = 8(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 = 8x - 23 - 2\sqrt{x-3}$.
   - Étude de $g \circ f$:

- $\star$ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $f(x) \in \mathcal{D}_g$, à savoir si et seulement si $f(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 \geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 17$ et les deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[}$.
- $\star$ Expression : Pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x^2 - x - 2}$.

2. • Étude de $f \circ g$:
   - $\star$ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_g$ et $g(x) \in \mathcal{D}_f$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. On a : $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \neq 0$: toujours vrai. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}^\star}$.
   - $\star$ Expression : Pour tout $x \neq 0$, on a : $f\circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{2(g(x))^2 - 8}{g(x)} = \dfrac{2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 8}{\frac{x^2+1}{x}} = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 8x^2}{x^2} \times \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x(x^2+1)}$.

   • Étude de $g \circ f$:
   - $\star$ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathcal{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. On a : $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}}$.
   - $\star$ Expression : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} + \dfrac{x}{2x^2 - 8} = \dfrac{4x^4 - 31x^2 + 64}{x(2x^2 - 8)}$.

Correction 4.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$: La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{e^{\frac{x}{2}}} > 0$, $e^{\frac{x}{2}} \geq 0$, $2x - 1 > 0$ et $e^{2\ln(2x-1)} \geq 0$. Comme toute exponentielle est strictement positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_f =]\dfrac{1}{2}, +\infty[}$.

   Pour tout $x > \dfrac{1}{2}$, on a :

   $$f(x) = x \ln \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{\dfrac{1}{2}} + \left(e^{2\ln(2x-1)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \ln (e^{\frac{x}{4}}) + \left(e^{\ln((2x-1)^2)}\right)^{\frac{3}{2}} = x \times \frac{x}{4} + ((2x-1)^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{4} + (2x-1)^3$$

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$. La fonction g est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_g = [1, +\infty[}$.

   On ne peux RIEN simplifier car $\sqrt{\ln x} = (\ln x)^{\dfrac{1}{2}} \neq \dfrac{1}{2} \ln(x)$... De même, on a : $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$... et on ne peux rien faire avec $(\ln x)^2$.

II Fonctions polynomiales

Correction 5.

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X+1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

III Exponentielle et logarithme

Correction 6. **Résolution d'équations et d'inéquations avec $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$.**

1. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{x^2 - 4e^2}) < \mathbf{1} + \ln(\mathbf{3x})$:**

   ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} =]2e, +\infty[$

   ⋆ On a : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow x^2 - 3xe - 4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathcal{S} =]2e, 4e[}$.

2. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $|\ln \mathbf{x}| < \mathbf{1}$:**

   ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{+\star}$.

   ⋆ On distingue deux cas :

   - Si $x \geq 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, donc $\mathcal{S}_\infty = [1, e[$.
   - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e}$, donc $\mathcal{S}_2 = \left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$.

   Ainsi, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, soit : $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{e}, e\right[}$.

3. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\ln(\mathbf{2x + 4}) - \ln(\mathbf{6 - x}) = \ln(\mathbf{3x - 2}) - \ln(\mathbf{x})$:**

   ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \left]\dfrac{2}{3}, 6\right[$.

   ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x+4)] = \ln[(3x-2)(6-x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4) = (3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{6}{5}, 2\right\}}$.

4. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2^{2x+1} + 2^x = 1}$:**

   ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

   ⋆ On a : $2^{2x+1} + 2^x = 1 \Leftrightarrow 2 \times (2^x)^2 + 2^x - 1 = 0$. On pose $X = 2^x$, et on doit résoudre

$2X^2+X-1=0$. Le discriminant est 9 et les racines sont ainsi -1 et $\frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} 2^{2x+1}+2^x=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x\ln 2}=-1 \\ \text{ou} \\ e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{x\ln 2}=\frac{1}{2} \qquad \text{car } e^{x\ln 2}>0 \\ &\Leftrightarrow \quad x\ln 2=-\ln 2 \qquad \text{car la fonction logarithme est strictement croissante} \\ &\Leftrightarrow \quad x=-1. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=\{-1\}}$.

5. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2e^{2x}-e^x-1\leq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^x$ et on doit résoudre $2X^2-X-1\leq 0$. On obtient $X\in\left]-\frac{1}{2},1\right[$, soit $e^x>-\frac{1}{2}$ et $e^x<1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x<0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=]-\infty,0]}$.

6. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{2\ln(x)+\ln(2x-1)>\ln(2x+8)+2\ln(x-1)}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=]1,+\infty[$.
   - ⋆ En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2-14x+8<0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathcal{S}=]1,2[}$.

7. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{4e^x-3e^{\frac{x}{2}}\geq 0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On pose $X=e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2-3X\geq 0 \Leftrightarrow X(4X-3)\geq 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}}\leq 0$ ou $e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathcal{S}=\left[2\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[}$.

8. **Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\mathbf{9^x-2\times 3^x-8>0}$:**

   - ⋆ Domaine de résolution : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
   - ⋆ On peut remarquer que : $9^x=(3^x)^2$. Ainsi on pose $X=3^x$ et on obtient que : $X^2-2X-8>0$. Le discriminant vaut $\Delta=36$ et les racines sont -2 et 4. Ainsi on doit résoudre $3^x<-2$ ou $3^x>4$. Or on sait que $3^x=e^{x\ln 3}$ ainsi la première inéquation est impossible et la deuxième inéquation donne : $3^x>4\Leftrightarrow x>\frac{\ln 4}{\ln 3}$ en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et car $\ln 3>0$. On a donc : $\boxed{\mathcal{S}=\left]\frac{\ln 4}{\ln 3},+\infty\right[}$.

Correction 7. Utilisation d'une étude de fonction.

1. **Montrons que $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{x} - \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \leq \ln(\mathbf{1}+\mathbf{x}) \leq \mathbf{x}$:**
   On démontre l'inégalité en deux temps.
   - Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$:

     On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geq 0$. On obtient donc les variations suivantes en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$

     Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, à savoir $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.
   - On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.
2. **Montrons que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{e^x} - \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \geq \mathbf{1}$:**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = e^x - x.$$
   Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

   Justifions les limites aux bornes : on a : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. L'étude en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on met en facteur le terme dominant à savoir e^x et on obtient ainsi : $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2e^x} = 0$. Ainsi par quotient, somme et produit de limite, on obtient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, 0 est le minimum de f atteint en $x = 0$ et donc la fonction f est toujours positive ou nulle. Ainsi, on a bien
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq \frac{x^2}{2} + 1.}$$

IV Fonctions trigonométriques

Correction 8.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** on a $\frac{pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.

- **Calcul de** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **:** de même, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **:** à partir du calcul précédent, on a :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3}}{4}}$$

- **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **:** Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}$. On pose alors $\theta=\frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1$. Ainsi,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.}$$

Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. On obtient ainsi,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{\sqrt{2}+2}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.}$$

Correction 9.

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) On a $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

   $$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$

   (b) De même, $1 + u^2 > 0$ donc $\dfrac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

   $$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$

   (c) On a $1 - u^2 \neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \notin \{-1, 1\}$. On doit donc avoir $x \in \mathbb{R}\backslash\left(\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :

   $$\frac{2u}{1-u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\dfrac{x}{2} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in}$

   On pose alors $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre

   $$\frac{1-u^2}{1+u^2} - 3\frac{2u}{1+u^2} + 2u - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - u^2 - 6u + 2u + 2u^3 - 1 - u^2}{1+u^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2u(u^2 - u - 2)}{1+u^2} = 0.$$

   On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u \in \{0, -1, 2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

   - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
   - $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \arctan(2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

   $$\boxed{S = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{2\arctan 2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

V Etudes de fonctions

Correction 10.

1. Étude de f : on fait un tableau donnant les valeurs de f selon la valeur de x :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert x-5\rvert$		$-x+5$		$-x+5$	0	$x-5$	
$f(x)$		$-3x+8$		$x+2$		$3x-8$	

On peut alors tracer la fonction qui correspond à 3 bouts de droite, qui se rejoignent en $\frac{3}{2}$ et en 5.

2. Étude de g : On fait de même pour la fonction g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$\lvert 2x^2-5\rvert$		$2x^2-5$	0	$5-2x^2$		$5-2x^2$		$5-2x^2$	0	$2x^2-5$	
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1	
$f(x)$		x^2-4		$-3x^2+6$		$-x^2+4$		$-3x^2+6$		x^2-4	

Correction 11.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
2. On commence par donner l'expression de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   - Si $x > 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln x|}$. Il s'agit alors d'étudier le signe de $\ln x$.
     - ⋆ Si $x \geq 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln x} = x^2$.
     - ⋆ Si $0 < x < 1$, on obtient : $f(x) = xe^{-\ln x} = xe^{\ln \frac{1}{x}} = x \times \frac{1}{x} = 1$.
   - Si $x < 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln(-x)|}$. Là encore, il s'agit d'étudier le signe de $\ln(-x)$:
     - ⋆ Si $-1 \leq x < 0$ alors $0 < -x \leq 1$ et on obtient : $f(x) = xe^{-\ln(-x)} = xe^{\ln \frac{-1}{x}} = x \times \frac{-1}{x} = -1$.
     - ⋆ Si $x < -1$ alors $-x > 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln(-x)} = -x^2$.

   Ainsi, on obtient les valeurs suivantes pour f selon les valeurs de x :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-x^2$		-1	‖	1		x^2	

Correction 12.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Réduction d'intervalle :
   - Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + \pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   - Montrons que f est paire : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f(-x) = \ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
   - Soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
     On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe. Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. La fonction $x \mapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \mapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

   De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.
   Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geq 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geq 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-\ln 2$

   En effet : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.

Correction 13.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos x - \cos(3x)$ car la fonction f est paire. Ainsi $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique :
     - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
     - ⋆ Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi,\pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0,\pi]$. La courbe $\mathcal{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x) = -3(\sin x - \sin(3x)) = -3 \times 2\cos(2x)\sin(-x) = 6\cos(2x)\sin(x)$ en utilisant une formule de trigonométrie et le fait que la fonction sinus est impaire.
3. Étude du signe de f' sur $[0,\pi]$:
Sur $[0,\pi]$, on a : $\sin(x) \geq 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$. En faisant un cercle trigonométrique, on remarque que sur $[0,\pi]$, on obtient : $\cos(2x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\pi]$. On obtient ainsi le tableau des variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

4.
   - La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est : $y = f'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$. On obtient ainsi : $y = -6(x-\frac{\pi}{2})$.
   - La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On obtient donc : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $\sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi$.

Correction 14.

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $2x \neq 0$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{2x^2}$.
2.
   - Limites en $\pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ au voisinage de $\pm\infty$.
   - Limites en 0 : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

3. Déjà fait à la question précédente.
4. La fonction f est dérivable en 1 ainsi la tangente T_1 à la courbe au point d'abscisse 1 existe bien et son équation est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Les calculs donnent : $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.
5.
   - Le domaine de définition est bien centré en 0 car : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, -x \in \mathbb{R}^\star$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, on a : $f(-x) = \frac{x+1}{-2x} = -\frac{x+1}{2x}$ et $-1-f(x) = \frac{-2x+x-1}{2x} = -\frac{x+1}{2x}$. Ainsi, on a bien : $f(-x) = -1 - f(x)$.

   On cherche alors une symétrie s entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ sur le graphe de f, soit s telle que $(-x, f(-x)) = s(x, f(x))$. Pour cela, essayons de trouver quelles conditions doit vérifier $(x, f(x))$ pour que le point soit inchangé par la symétrie. Le point $(x, f(x))$ est un point fixe de s si on a $s(x, f(x)) = (x, f(x))$. Or $s(x, f(x)) = (-x, f(-x))$, donc on doit avoir :

$$\begin{cases} -x &= x \\ f(-x) &= f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 0 \\ -1-f(x) &= f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ f(x) &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Le seul point fixe de la transformation est $\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. On vérifie alors que l'on a bien : $\frac{x+(-x)}{2} = 0$ et $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = -\frac{1}{2}$, autrement dit que Ω est le milieu entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$. On obtient alors que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
6. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+1-2x^2}{2x} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 9$ et les deux racines sont -1 et $\frac{1}{2}$. Ces solutions correspondent aux abscisses des points fixes pour la fonction f.

Correction 15.

1. Soit $m \in \mathbb{R}^\star$ fixé. La fonction f_m est bien définie si et seulement si : $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et ainsi $\mathcal{D}_{f_m} =]-1, +\infty[$.
2.
   - Limite en -1 : par propriété sur les somme, composée et produit de limite $\lim_{x \to -1^+} x \ln(1+x) = +\infty$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que $m > 0$ ou $m < 0$.
     - ⋆ Si $m > 0$, alors $\lim_{x \to -1^+} f_m(x) = +\infty$ par propriété sur les produit et composée de limite.
     - ⋆ Si $m < 0$, alors $\lim_{x \to -1^+} f_m(x) = 0$ par propriété sur les produit et composée de limite.
   - Limite en $+\infty$: par propriété sur les somme, composée et produit de limite $\lim_{x \to +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que $m > 0$ ou $m < 0$.
     - ⋆ Si $m > 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$ par propriété sur les produit et composée de limite.
     - ⋆ Si $m < 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = 0$ par propriété sur les produit et composée de limite.
3. Soit $m \in \mathbb{R}^\star$ fixé. La fonction f_m est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme somme, composée et produit de limite. De plus, on a, pour tout $x > -1$:

$$f'_m(x) = e^{mx\ln(1+x)}\left(m\ln(1+x) + \frac{mx}{1+x}\right) = me^{mx\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = mf_m(x)g_m(x)$$

   avec $g_m(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.
4. Comme on ne sait pas étudier le signe de g_m directement, on étudie les variations de cette fonction pour en déduire son signe.

- La fonction g_m est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composé, quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x>-1$, on a : $g_m'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.
- On en déduit les variations suivantes :

x	-1		0		$+\infty$
$g_m'(x)$		$+$		$+$	
g_m	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Justifions les limites :
  - ⋆ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. Ainsi par propriété sur les composée et somme de limite, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g_m(x)=+\infty$.
  - ⋆ $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}g_m(x)=-\infty$ par propriétés sur les quotient, compsée et somme de limites.
  - ⋆ $g_m(0)=0$.

5. On connaît ainsi le signe de g_m : négatif ou nul sur $]-1,0]$ et strictement positif sur $]0,+\infty[$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive et que $f_m'=mf_mg_m$, on en déduit le signe de f_m' selon si $m>0$ ou $m<0$.
   - Si $m>0$, alors le signe de f_m' est celui de g_m et on obtient donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	0	$+$	
f_m	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   - Si $m<0$, alors le signe de f_m' est l'opposé de celui de g_m et on obtient donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	0	$-$	
f_m	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

V. 1 Calculs d'ensembles de dérivabilité et de dérivées

Correction 16.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)=x^2e^{-\frac{1}{x}}}$:**

- Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1).}$

2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $x^2+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+1} \neq 0$. Ainsi elle est bien définie si et seulement si $x^2+1>0$ ce qui est toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et car $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\cos x\sqrt{x^2+1} - \sin x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \dfrac{(x^2+1)\cos x - x\sin x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
3. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \sqrt{e^x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$.
4. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = e^{x\cos(x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = [\cos(x) - x\sin(x)]\, e^{x\cos x}.}$
5. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x - x^2 \geq 0$. C'est un polynôme de deré 2 dont les racies sont 0 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = [0,1]$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si $x-x^2>0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, coposée et produti de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\boxed{f'(x) = \left[\dfrac{(1-x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} - 1\right] e^{\sqrt{x-x^2}}.}$
6. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2+\cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(5x) \neq -2$: impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin^2(2x)}{(2+\cos(x))^2}\left[12\cos(2x) + 6\cos(2x)\cos(5x) + 5\sin(2x)\sin(5x)\right].}$$

7. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \sin(\ln x)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.

- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}.}$

8. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(e^x + x^2)}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est définie si et seulement si $e^x + x^2 > 0$: toujours vrai comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$.
9. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{x - e^x}{e^x + 1}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes tous les deux strictement positifs, une exponentielle étant toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}.}$
10. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 - 4}}\right)}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2 - 4}} > 0$. Comme une racine carrée est toujours positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $x + 2 > 0$. La première condition est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-2, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ (car ce qui est sous la racine est déjà strictement positif) comme produit, sommes, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2(9x + 2)}{(x + 2)(9x^2 - 4)}.}$
11. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos^4(x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}.}$
12. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2^{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} \neq 0$: toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée et quotient de fonctions dérivables.

- Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{-\ln 2}{2^{x+1}}.}$ On peut pour cela remarquer que $f(x) = e^{-(x+1)\ln 2}$.

13. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = (e^{2x} - 1)^{\pi}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^{2x} - 1 > 0$ car on a : $(e^{2x} - 1)^{\pi} = e^{\pi \ln(e^{2x}-1)}$. Or $e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$ par passage au logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée, somme et produit de focntions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{2\pi e^{2x}}{e^{2x}-1}(e^{2x} - 1)^{\pi}.}$

14. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 + 3x \geq 0$ et $3^x = e^{x\ln 3} \neq 0$. La deuxième condition est toujours vérifiée car une exponentielle est toujours strictement positive. Pour la première condition, on reconnaît un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et -3. Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ car on doit avoir $x^2 + 3x > 0$ puis comme sommes, produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{2(x^2+3x)}{3^{4x}}\left[2x + 3 - 2(x^2 + 3x)\ln 3\right].}$

15. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = 2^{\ln x}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ en écrivant que $2^{\ln x} = e^{\ln(x)\ln 2}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{\ln 2}{x}2^{\ln x}.}$

16. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$, $\ln x \geq 0$ et $x \neq 0$. La deuxième condition donne : $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Donc $\mathcal{D}_f = [1, +\infty[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir $\ln x > 0$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}.}$

17. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\ln x)}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Or on a : $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}.}$

18. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)}$:**

- Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{x^2-1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}>-x$ et $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. On doit donc étudier deux cas afin de résoudre la première inéquation :
  - ⋆ Si $x\geq 1$, alors $-x\leq -1$ et l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif.
  - ⋆ Si $x\leq -1$ alors $-x\geq 1$ et on peut donc passer au carrée tout en conservant l'équivalence, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors : $\sqrt{x^2-1}>-x \Leftrightarrow x^2-1>x^2 \Leftrightarrow -1>0$. Toujours faux.

  Donc $\mathcal{D}_f=[1,+\infty[$.
- Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ car on doit avoir en plus $x^2-1>0$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
- Dérivée : Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$

19. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}}$:**
    - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x>0$ et $x^x=e^{x\ln x}\neq 0$. La deuxième inéquation est toujours vérifiée, une exponentielle étant toujours strictement négative. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}$ (on commence par écrire que : $\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}=\dfrac{\cos(x)e^{(x-1)\ln(3)}}{e^{x\ln x}}$).
    - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - Dérivée : Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x)=\frac{e^{(x-1)\ln(3)}}{x^x}[-\sin(x)+\ln(3)\cos(x)-\cos(x)(\ln(x)+1)].}$

Correction 17.

1. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}}$:**
   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|x^2-1|>0$ et $x\neq 0$. Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc on a : $|x^2-1|>0 \Leftrightarrow x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\notin\{-1,1\}$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme somme, composée et quotient de fonctions dérivables (il y a une valeur absolue mais on a bien $x^2-1\neq 0$ sur $\mathcal{D}_f$ donc le domaine de dérivabilité est bien égal au domaine de définition).
   - Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1	
$f(x)$		$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	

   On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :
   - ⋆ Si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: on a alors $f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.

⋆ Si $x \in]-1,0[\cup]0,1[$: on a alors $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln(1-x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

On peut remarquer que l'on peut regrouper ces deux cas en une formule générale en utilisant de nouveau la valeur absolue et on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)\ln|x^2-1|}{x^2(x^2-1)}.}$

2. **Ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de f définie par : $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|e^x - 1| + 1}}}$:**

   - Ensemble de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $|e^x - 1| + 1 > 0$: toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif car $1 > 0$ et une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Ensemble de dérivabilité : La fonction f est dérivable si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $e^x - 1 \neq 0$ (à cause de la présence de la valeur absolue). Or on a : $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme composée et quotient de fonctions dérivables.
   - Dérivée : Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|e^x - 1\|$		$1 - e^x$	0	$e^x - 1$	
$f(x)$		$\dfrac{x}{\sqrt{2 - e^x}}$	‖	$\dfrac{x}{\sqrt{e^x}}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

⋆ $\boxed{\text{Si } x \in]-\infty,0[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{4 - 2e^x + xe^x}{2(2-e^x)\sqrt{2-e^x}}.}$

⋆ $\boxed{\text{Si } x \in]0,+\infty[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{e^x}}.}$

V. 2 Fonction majorée, minorée, bornée

Correction 18. Seule une étude des variations de la fonction assure que les bornes trouvées sont bien optimales.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Ainsi elle est en particulier bien définie sur $[0,+\infty[$.
   - Limites aux bornes : $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par propriétés sur les somme et quotient de limite.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x \geq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Ainsi : $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.
   - Tableau des variations :

x	0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

- Étude des extrema : la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$, et $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc f est majorée et minorée sur $\mathbb{R}^+$. On obtient : $\sup_{[0,+\infty[} f = \max_{[0,+\infty[} f = 1$ et $\inf_{[0,+\infty[} f = 0$.

2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Étude de la périodicité :
     - ⋆ $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x+2\pi \in \mathcal{D}_f$.
     - ⋆ Soit $x \in \mathcal{D}_f$: $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique. Ainsi on peut restreindre l'étude de la fonction f à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple : $[-\pi,\pi]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x + \cos x$.
     On étudie alors le signe de f sur $[-\pi,\pi[$: on reconnaît une expression de la forme : $a\cos x + b\sin x$, on obtient donc : $f'(x) = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
     Étude du signe : on a
     $$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+2k\pi.$$
     On peux alors faire un cercle trigonométrique et on voit alors que sur $[-\pi,\pi[$, on a : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
   - Tableau des variations :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-1

   - Étude des extrema : on a f décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donc f admet un minimum en $-\frac{3\pi}{4}$ qui vaut $-\sqrt{2}$. De même, f admet un minimum en $\frac{\pi}{4}$ qui vaut $\sqrt{2}$. La fonction f est donc bornée sur $[-\pi,\pi]$: elle est majorée par $\sqrt{2}$ et minorée par $-\sqrt{2}$. Comme ces deux nombres sont atteints, on obtient : $\sup_{\mathbb{R}} f = \max_{\mathbb{R}} f = \sqrt{2}$ et $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = -\sqrt{2}$. On utilise ici aussi la 2π périodicité de f pour passer de l'intervalle $[-\pi,\pi[$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ sur $[1,+\infty[$.

- Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$. On obtient ainsi : $1 + \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq e^{-1}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{-1} < 1$, la fonction f est donc en particulier bien définie sur $[1, +\infty[$.
- Limites aux bornes : on a : $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par propriété sur les somme et quotient de limite.
- Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 1$, on a en particulier : $f'(x) = \dfrac{-1}{x\,(1 + \ln x)^2}$. Comme on est sur $[1, +\infty[$, on a : $x > 0$. Ainsi comme un carré est toujours positif, on obtient : $f'(x) < 0$.
- Tableau des variations :

x	1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0

- Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée par 1 et minorée par 0. Comme $1 = f(1)$, 1 est atteint et ainsi c'est le maximum de f sur $[1, +\infty[$: $\sup_{[1,+\infty[} f = \max_{[1,+\infty[} f = 1$. Le nombre 0 n'est jamais atteint car c'est une limite et ainsi, on obtient 0 est la borne inférieure de f sur $[1, +\infty[$ mais il n'y a pas de minimum.

4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ et en particulier f est bien définie sur $[1, 6]$.
   - Dérivabilité : la fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient et somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{5}{x} - 1 - \dfrac{6}{x^2} = \dfrac{-x^2 + 5x - 6}{x^2}$. Le discriminant vaut $\Delta = 1$ et les racines sont 2 et 3.
   - Tableau des variations :

x	0	1		2		3	6	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\searrow$	5	$\searrow$	$5\ln 2 + 1$	$\nearrow$	$5\ln 3 - 1$	$5\ln(6) - 5$	$\searrow$

   - Étude des extrema : La fonction f est ainsi majorée et minorée sur $[1, 6]$. Comme $5\ln 3 - 1 \leq 5$, on obtient que $\sup_{[1,6]} f = \max_{[1,6]} f = 5$. Et comme $5\ln 2 + 1 > 5\ln 6 - 5$, on a : $\inf_{[1,6]} f = \min_{[1,6]} f = 5\ln 6 - 5$.

V. 3 Parité, imparité, périodicité, symétrie

Correction 19.

1. $f(x)=\sqrt{x^2}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2\geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$. Donc la fonction f est paire.
2. $f(x)=x^2+x^4+x^6+x^8$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et $\forall x\in\mathcal{D}_f$: $f(-x)=(-x)^2+(-x)^4+(-x)^6+(-x)^8=x^2+x^4+x^6+x^8=f(x)$. Donc la fonction f est paire.
3. $f(x)=x+x^3+x^5+2x^7$:
   - Domaine de définition : la fonction f est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(-x)=-x+(-x)^3+(-x)^5+2(-x)^7=-x-x^3-x^5-2x^7=-(x+x^3+x^5+2x^7)=-f(x)$ Donc la fonction f est impaire.
4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\dfrac{1-|x|}{2-|x|}\geq 0$ et $2-|x|\neq 0$. Comme il y a une valeur absolue, on fait des cas :
     - ⋆ Si $x\geq 0$: on doit résoudre : $\dfrac{1-x}{2-x}\geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x\geq 0$ donne : $x\in[0,1]\cup]2,+\infty[$.
     - ⋆ Si $x<0$: on doit résoudre : $\dfrac{1+x}{2+x}\geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x<0$ donne : $x\in]-\infty,-2[\cup[-1,0]$.

     Ainsi, on obtient $\mathcal{D}_f=]-\infty,-2[\cup[-1,1]\cup]2;+\infty[$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x\in\mathcal{D}_f$, on a : $f(-x)=\sqrt{\dfrac{1-|-x|}{2-|-x|}}=\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}=f(x)$ car $|-x|=|-1|\times|x|=|x|$. Donc la fonction f est paire.
5. $f(x)=\dfrac{x^3+3x}{x^2+|x|}$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2+|x|\neq 0$. Or cette expression est toujours positive, comme somme de termes positif, et s'annule uniquement si les deux termes s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $x=0$. Ainsi, on obtient $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x\in\mathcal{D}_f$: $f(-x)=\dfrac{(-x)^3-3x}{(-x)^2+|-x|}=\dfrac{-x^3-3x}{x^2+|x|}=-f(x)$. Donc la fonction f est impaire.
6. $f(x)=|x+1|-|x-1|$:
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f$ est centré en 0, et $\forall x\in\mathcal{D}_f$: $f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=|-(x-1)|-|-(x+1)|=|-1||x-1|-|-1||x+1|=|x-1|-|x+1|=-(|x+1|-|x-1|)=-f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

7. $f(x) = \sin x + \cos x$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : pas de parité : la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$ et $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$: $f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi)) = \cos x + \cos(2x+4\pi) = \cos(x) + \cos(2x) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Correction 20. On considère deux fonctions f et g toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \circ g$ est impaire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est elle aussi impaire, on obtient : $f[-g(x)] = -f[g(x)] = -f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = -f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est impaire et on a bien montré que la compoée de deux fonctions impaires est impaire.
2. On suppose par exemple que f est paire et que g est impaire. Montrons que $f \circ g$ est paire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est paire, on obtient : $f[-g(x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$.

   Donc $f \circ g$ est paire et on a bien montré que la compoée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire.
3. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f+g)(-x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$.

   Donc $f + g$ est impaire et on a bien montré que la somme de deux fonctions impaires est impaire.
4. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \times g$ est paire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x))$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f \times g)(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$.

   Donc $f \times g$ est paire et on a bien montré que le produit de deux fonctions impaires est paire.