

TD 3 - Fonctions usuelles réelles

I Ensemble de définition

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$

2. $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$

3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{\sqrt{5+x}}{x}$

4. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

5. $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)$

Exercice 2. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donnée par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 3. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

1. $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x-3}$.

2. $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 8}{x}$ et $g : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

Exercice 4. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2 \ln(2x-1)}}\right)^3$.

2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.

II Fonctions polynomiales

Exercice 5. On pose $P(x) = x^2 + 3x$, $Q(x) = x^2 + x + 1$, $S(x) = x^2 - 1$.

1. Calculer $P^2(x)$, $P(x) - Q(x)$ et $P^2(x) - Q^2(x)$.

2. Calculer $P(x+1)$.

3. Calculer $S \circ f(t)$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

III Exponentielle et logarithme

Exercice 6. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions \ln , \exp et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

2. $|\ln x| < 1$

3. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$

4. $2^{2x+1} + 2^x = 1$

5. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$

6. $2 \ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2 \ln(x-1)$

7. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$

8. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

Exercice 7. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$.

IV Fonctions trigonométriques

Exercice 8. Calculer les réels suivants : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 9. 1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :

$$(a) \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad (b) \sin x = \frac{2u}{1 + u^2} \quad (c) \tan x = \frac{2u}{1 - u^2}$$

2. En utilisant ces relations, résoudre sur \mathbb{R} l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

V Études de fonctions

Exercice 10. (Valeurs absolues) On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto |2x - 3| + |x - 5| \quad \text{et} \quad g : x \mapsto |2x^2 - 5| - |x^2 - 1|.$$

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x . En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 11. (Valeurs absolues) Soit la fonction h définie par $h(x) = x \exp|\ln|x||$.

1. Donner l'ensemble de définition de h .
2. Représenter graphiquement la fonction h .

Exercice 12. (Fonctions trigonométriques) Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Exercice 13. (Fonctions trigonométriques) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3\cos x - \cos(3x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 14. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1-x}{2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f , étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de f aux bords de \mathcal{D}_f et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes.

4. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en $x = 1$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Interprétation graphique?
6. Tracer la courbe représentative de f .
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur \mathbb{R} et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?

Exercice 15. (Paramètres) Pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, on désigne par f_m la fonction définie par $f_m(x) = e^{mx \ln(1+x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition commun \mathcal{D} de toutes les fonctions f_m .
2. Discuter selon m les limites de f_m aux bornes de cet ensemble.
3. Montrer que f_m est dérivable sur \mathcal{D} pour tout $m \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, il existe une fonction g_m telle que : $f'_m = mg_m f_m$.
4. Montrer que g_m est une fonction strictement croissante sur \mathcal{D} .
5. Dédire des questions précédentes les variations de f_m suivant m .
6. Tracer dans un même repère $\mathcal{C}_{-1}, \mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$ et \mathcal{C}_1 .

V. 1 Calculs d'ensembles de dérivabilité et de dérivées

Exercice 16. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ | 8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$ | 14. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{3^x} \right)^4$ |
| 2. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ | 9. $f(x) = \frac{x - e^x}{e^x + 1}$ | 15. $f(x) = 2^{\ln x}$ |
| 3. $f(x) = \sqrt{e^x}$ | 10. $f(x) = \ln \left(\frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 - 4}} \right)$ | 16. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ |
| 4. $f(x) = e^{x \cos(x)}$ | 11. $f(x) = \frac{1}{(\cos(x))^4}$ | 17. $f(x) = \ln(\ln x)$ |
| 5. $f(x) = (1 - x)e^{\sqrt{x-x^2}}$ | 12. $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$ | 18. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$ |
| 6. $f(x) = \frac{\sin^3(2x)}{2 + \cos(5x)}$ | 13. $f(x) = (e^{2x} - 1)^\pi$ | 19. $f(x) = \frac{3^{x-1} \cos x}{x^x}$ |
| 7. $f(x) = \sin(\ln x)$ | | |

Exercice 17. (Avec des valeurs absolues) Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivées :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$ | 2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{ e^x - 1 + 1}}$ |
|--------------------------------------|--|

V. 2 Fonction majorée, minorée, bornée

Exercice 18. Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$. | 3. $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$. |
| 2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur \mathbb{R} . | 4. $f : x \mapsto 5 \ln(x) - x + \frac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5 \ln(3) \leq 6$). |

V. 3 Parité, imparité, périodicité, symétrie

Exercice 19. Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f . Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$

2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$

3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$

4. $f(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{2 - |x|}}$

5. $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + |x|}$

6. $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

7. $f(x) = \sin x + \cos x$

8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Exercice 20. Montrer les résultats suivants :

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.