Correction DS 2

Exercice 1. 1. Résoudre $e^x - 2e^{-x} \geq -1$ (On pourra faire un changement de variable)

2. Résoudre $2x - \sqrt{3x+1} > 0$
3. Résoudre $2x - \sqrt{3x+1} = 1$
4. En déduire le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 2e^{-x} + 1}}{\ln\left(2x - \sqrt{3x+1}\,\right)}$$

Correction 1.

1. On note (1) l'inéquation $e^x - 2e^{-x} \geq -1$
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ l'inéquation (1) est équivalente à

$$e^{2x} - 2 \geq -e^x$$

On effectue ensuite le changement de variable $X = e^x$ on obtient alors l'inéquation

$$X^2 - 2 + X \geq 0$$

Le membre de gauche se factorise en $(X-1)(X+2)$ on obtient donc

$$(X-1)(X+2) \geq 0$$

dont les solutions sont

$$\mathcal{S}_X =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$$

Les réels x solutions de (1) vérifient donc $e^x \in \mathcal{S}_X$ c'est-à-dire

$$e^x \in [1, +\infty[$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. Les solutions de (1) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = [0, +\infty[}$$

2. On note (2) l'inéquation $2x - \sqrt{3x+1} > 0$. Son ensemble de définition est $[-\frac{1}{3}, +\infty[$ et on a

$$(2) \Longleftrightarrow 2x > \sqrt{3x+1}$$

Si $x < 0$, comme $\sqrt{3x+1} \geq 0$ l'inéquation n'a pas de solution.
Si $x \geq 0$, alors l'inéquation est équivalente à

$$4x^2 > 3x + 1$$

Que l'on résout en trouvant les racines de $4x^2 - 3x - 1$:

$$r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{4}.$$

Ainsi $4x^2 - 3x - 1 = 4(x-1)(x + \frac{1}{4}$ et donc

$$(2) \Longleftrightarrow 4(x-1)(x + \frac{1}{4} > 0$$

Dont les solutions sont $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ Or, $x \geq 0$ donc les solutions sur $[0, +\infty[$ sont $]1, +\infty[$.
Les solutions de (2) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 =]1, +\infty[}$$

3. On note (3) l'équation $2x - \sqrt{3x+1} = 1$. Son ensemble de définition est $[-\frac{1}{3}, +\infty[$ et on a

$$(3) \Longleftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{3x+1}$$

Si $2x - 1 < 0$, comme $\sqrt{3x+1} \geq 0$ l'équation n'a pas de solution.
Si $2x - 1 \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} (3) &\Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 3x + 1 \\ &\Longleftrightarrow 4x^2 - 7x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(4x - 7) = 0 \end{aligned}$$

dont les solutions sont $\{0, \frac{7}{4}\}$. Or, $x \geq \frac{1}{2}$ donc il y a une unique solution sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ à savoir $\{\frac{7}{4}\}$
Les solutions de (3) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \{\tfrac{7}{4}\}}$$

4. $x \to \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$, ln est définie sur $]0, +\infty[$ et enfin $x \to \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est donc définie pour tout x tel que
   - $e^x - 2e^{-x} + 1 \geq 0$
   - $2x - \sqrt{3x+1} > 0$
   - $\ln(2x - \sqrt{3x+1}) \neq 1$

   On reconnait l'inéquation (1) et (2). Enfin, remarquons que $\ln(2x - \sqrt{3x+1}) \neq 1 \Longleftrightarrow 2x - \sqrt{3x+1} \neq 1$
   Ainsi f est définie pour x tel que
   - $x \in \mathcal{S}_1$
   - $x \in \mathcal{S}_2$
   - $x \notin \mathcal{S}_3$

   L'ensemble de définition de f est donc

$$D_f = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \setminus \mathcal{S}_3$$

$$\boxed{D_f =]1, \tfrac{7}{4}[\cup]\tfrac{7}{4}, +\infty[}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En intervertissant les deux sommes, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$$

Correction 2. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1} = \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} \frac{k}{l+1}$$

On peut également détailler les calculs : $\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & k & \leq & n \\ k & \leq & l & \leq & n \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & l & \leq & n \\ 0 & \leq & k & \leq & l. \end{array} \right.$ Ainsi on obtient que :

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} \frac{k}{l+1} = \sum_{l=0}^{n} \left[\frac{1}{l+1} \sum_{k=0}^{l} k \right] = \sum_{l=0}^{n} \left[\frac{1}{l+1} \times \frac{l(l+1)}{2} \right] = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n} l = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}.$$

Relation coefficients-racines Pour les exercices 3 et 4, on pourra utiliser le résultat suivant, appelé "relation coefficients-racines" :

— Soient $(s,p) \in \mathbb{C}^2$ et soient r_1 et r_2 les racines du polynôme : $x^2 - sx + p$. On a alors :

$$r_1 r_2 = p \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = s$$

— Réciproquement, soient r_1 et r_2 deux réels tels que $r_1 r_2 = p$ et $r_1 + r_2 = s$ alors r_1 et r_2 sont les racines du polynôme :

$$x^2 - sx + p.$$

Exercice 3. On propose de résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 6z + 4 = 0 \quad (E)$$

1. On considère $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E). Soient $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u + v = z$ et $uv = 2$.
   (a) Calculer $(u+v)^3$ de deux manières différentes.
   (b) En déduire que $u^3 + v^3 = -4$.
   (c) Calculer $u^3 v^3$.
   (d) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (e) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
2. On pose $w = -2 + 2i$.
   (a) Ecrire w sous la forme exponentielle.
   (b) Résoudre l'équation $Z^3 = w$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ en exprimant les solutions sous forme exponentielle.
   (c) On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $Z^3 = w$ est $\{1+i, (1+$ i) $j, (1+i)j^2\}$.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les valeurs possibles de u et v, puis de z.
4. En déduire les solutions de (E).

Correction 3.

1. (a) A l'aide du binome de Newton on obtient :

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3$$

Or $uv = 2$ on a alors :

$$\boxed{(u+v)^3 = u^3 + 6u + 6v + v^3}$$

Puis à l'aide de l'équation (E) on obtient

$$\boxed{(u+v)^3 = 6(u+v) - 4}$$

   (b) D'après la question précédente on a :

$$u^3 + 6u + 6v + v^3 = 6(u+v) - 4$$

en simplifiant on obtient

$$\boxed{u^3 + v^3 = -4}$$

   (c) $uv = 2$ donc

$$\boxed{u^3 v^3 = 2^3 = 8}$$

(d) Soit z_1, z_2 les solutions de $Z^2+4Z+8=0$. Ce sont donc les racines de Z^2+4Z+8. On a alors $Z^2+4Z+8=(Z-z_1)(Z-z_2)=Z^2-(z_1+z_2)Z+z_1z_2$. En identifiant on obtient

$$-(z_1+z_2)=4 \quad \text{et} \quad z_1z_2=8$$

Ce sont exacemetn les relations satisfaites par u^3 et v^3. Ainsi

$$\boxed{u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont les solutions de } Z^2+4Z+8=0.}$$

(e) Le discriminant de Z^2+4Z+8 est

$$\Delta = 16-32=-16$$

Z^2+4Z+8 admet donc deux racines complexes :

$$z_1=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i \quad \text{et} \quad z_2=-2-2i$$

Les solutions sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-2+2i,-2-2i\}}$$

2. (a) Le module de w est $|w|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. Ainsi

$$w=2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$

On cherche ensuite $\theta\in[0,2\pi[$ tel que

$$\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On peut prendre $\theta=\frac{3\pi}{4}$ Finalement

$$\boxed{w=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}}$$

(b) D'après la question précédente

$$Z^3=w \Longleftrightarrow Z^3=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

En notant $Z=\rho e^{i\theta}$ on obtient

$$\rho^3e^{3i\theta}=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

On a donc $\rho^3=2\sqrt{2}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2}^3$ et

$$3\theta\in\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$$

On obtient donc $\rho=\sqrt{2}$ et

$$\theta\in\{\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}|k\in\mathbb{Z}\}$$

Finalement les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S}_b=\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}i\frac{2\pi}{3}},\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{4\pi}{3}}\}}$$

(On laisse les solutions sous cette forme non simplifiée afin de répondre plus efficacement à la question suivante)

(c) On a d'une part

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1+i$$

Ainsi :

$$(1+i)j = (1+i)e^{2i\pi/3} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad (1+i)j^2 = (1+i)e^{4i\pi/3} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{4\pi}{3}}$$

On retrouve bien

$$\boxed{\mathcal{S}_b = \{1+i, (1+i)j, (1+i)j^2\}.}$$

3. D'après 1e. (quitte à échanger u et v)

$$u^3 = w \quad \text{et} \quad v^3 = \overline{w}$$

On obtient alors

$$u \in \{1+i, (1+i)j, (1+i)j^2\} \quad \text{et} \quad v \in \{1-i, (1-i)\overline{j}, (1-i)\overline{j}^2\}$$

Or $uv = 2$ donc les seules couples de solutions possibles sont

$$(u, v) \in \{(1+i, 1-i), ((1+i)j, (1-i)j^2), ((1+i)j^2, (1-i)j)\}$$

On obtient alors les valeurs de $z = u + v$ correspondantes :

$$z \in \{2, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}$$

4. Les solutions de (E) sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{2, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\}}$$

Exercice 4. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a

$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$

3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Montrer par récurrence que $\forall q \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

6. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
7. Montrer que $AB = 2$.
8. En déduire la valeur exacte de A.

Correction 4.

1.
$$\frac{1}{\omega} = e^{\frac{-2i\pi}{7}} = \overline{\omega}$$

2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ on a
$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$
D'où
$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \overline{\omega}^{7-k}$$

3. On a d'après la question précédente :
$$\begin{aligned}\overline{\omega} &= \omega^6\\ \overline{\omega^2} &= \omega^5\\ \overline{\omega^4} &= \omega^3\end{aligned}$$
Ainsi on a :
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4}\\ &= \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4}\\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3\\ &= B.\end{aligned}$$

4.
$$\mathfrak{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$
Comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
$$\sin(\frac{\pi}{7}) \leq \sin(\frac{2\pi}{7})$$
Donc
$$\mathfrak{Im}(A) \geq \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$$

5. On a
$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$$
Or
$$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$$

6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où
$$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$

7. A et B sont donc les racines du polynome du second degré $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc
$$A \in \{\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$$
D'après la question 4, $\mathfrak{Im}(A) > 0$ donc
$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 5. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. `Script1.py`

```
a=0
n=100
for i in range(n):
  a=a+i
print(a/50)
```

2. `Script2.py`

```
a=1
n=100
for i in range(n):
  a=a*i
print(a)
```

3. `Script3.py`

```
a=0
n=100
for i in range(0,n,2):
  a=a+i
print(a/50)
```

4. `Script4.py`

```
s=10
n=100
for i in range(n):
  s=s+2
print(s)
```

5. `Script5.py`

```
a=10
for i in range(3):
  if a%2==0:
    a=a/2+i
  else:
    a=a+3
print(a)
```

6. `Script6.py` (On pourra s'aider de l'exercice 2)

```
s=0
n=100
for k in range(n+1):
  for l in range(k,n+1):
    s=s+k/(l+1)
print(s)
```