Correction TD 5 - Suites réelles usuelles

I Suites usuelles

Correction 1.

1.
   - C'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 3n.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + 3\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + 3\frac{n(n+1)}{2}$.
2.
   - C'est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + \frac{n}{2}.$$
   - Elle diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) + \frac{n(n+1)}{4}$.
3.
   - C'est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 - 5n.$$
   - Elle diverge vers $-\infty$.
   - $S = 2(n+1) - 5\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1) - 5\frac{n(n+1)}{2}$.
4.
   - C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 23^n.$$
   - Comme $3 > 1$, la suite diverge vers $+\infty$.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} - 1$.
5.
   - C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
   - Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite converge vers 0.
   - $S = 2\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

6. • C'est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-5)^n.$$

• Comme $-5 < -1$, la suite n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.

• $S = 2\sum_{k=0}^{n}(-5)^k = \frac{1}{3}\left(1-(-5)^{n+1}\right).$

7. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{7}{2} \times 3^n - \frac{3}{2}.$

• Comme $3 > 1$, elle diverge vers $+\infty$.

• $S = \frac{7}{4}\left(3^{n+1}-1\right) - \frac{3(n+1)}{2}.$

8. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{9}.$

• Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, elle converge vers $\frac{2}{9}$.

• $S = \frac{32}{27}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2(n+1)}{9}.$

9. • C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4(-1)^n - 2.$

• Elle n'admet pas de limite, elle est divergente de deuxième espèce.

• $S = 2\left(1-(-1)^{n+1}\right) - 2(n+1).$

Correction 2.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \frac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a

     $$u_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \Leftrightarrow 5u_n - 2 > u_n + 2 \Leftrightarrow u_n > 1.$$

     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3,\ u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.

4. On en déduit la formule explicite de v_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$
5. Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 3. Toutes ces suites sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux, on les résout en étudiant l'équation caractéristique. Je ne donne ici que le résultat.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{4}\left(3^{n+1} + (-1)^n\right)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2 - \dfrac{5}{4}n\right)(-4)^n$
4. Suite de Fibonacci, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right).$

Correction 4. Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n u_1 = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n.$
2. Méthode 1 : on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 2^3 \times 2^{3^2} \times \cdots \times 2^{3^{n-1}} u_0^{3^n} = 2^{\sum_{k=0}^{n} 3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$ et on fait une récurrence.
Méthode 2 : on pose $u_n = 2^{v_n}$, et on essaye de calculer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $u_0 = 2 = 2^1$, donc $v_0 = 1$. De plus, on a :
$$u_{n+1} = 2(u_n)^3 \ \Leftrightarrow \ 2^{v_{n+1}} = 2 \times (2^{v_n})^3 \ \Leftrightarrow \ 2^{v_{n+1}} = 2^{3v_n+1} \ \Leftrightarrow \ v_{n+1} = 3v_n + 1.$$
On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite $v_n = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$, soit $u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$.

II Monotonie et convergence

Correction 5. Étude de la monotonie des suites suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - (n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2^{n+1}} < 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plutôt de type produit. Comme tous ses termes sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n!} = \frac{n+1}{2}.$$
Un calcul rapide donne
$$\frac{n+1}{2} < 1 \Leftrightarrow n+1 < 2 \Leftrightarrow n < 1.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante ou encorrectione la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n = f(n)$ avec
$$f:\ x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$
L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1, +\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$
Étudions le signe de $1-\ln x$ ($x^2 \geq 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1-\ln x$) :
$1-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}. \end{aligned}$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. On remarque que
$$u_{n+1}-u_n = n+1+2(-1)^{n+1} - n - 2(-1)^n = 1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1} = 1+4(-1)^{n+1}.$$
Ainsi, si $n = 2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p} = 5 > 0$ et si $n = 2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1} = -3 < 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > 0.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 6. Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} = +\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0) = 1$.

2. On a ici une forme indéterminée avec une différence de racines. L'idée est d'utiliser la quantitée conjuguée :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
Par quotient de limites, on obtient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) - \ln(n^2) = -\infty$ en utilisant $\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+n}{2^n} = 1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n = e^{n\ln 2}$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)} = 1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n^3)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2}$ en écrivant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n} = -1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.

9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ en utilisant un correctionollaire du théorème des gendarmes car $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ ou le théorème des gendarmes.

10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0 \leq \dfrac{1+(-1)^n}{n} \leq \dfrac{2}{n}$.

11. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n\cos n + 2 = +\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le correctionollaire du théorème des gendarmes avec $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

12. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n! + (n+1)!}{(n+2)!} = 0$ en utilisant la définition des factorielles.

13. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n+n) = +\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.

14. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ car $n^{1/n} = e^{1/n \ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

15. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^n = +\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire que $(\ln n)^n = e^{n\ln(\ln n)}$.

16. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{e^{n\ln 2}} = 0$.

17. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :
$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{1/n \ln(n^2+n+1)}.$$

Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors

$$\frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = \frac{\ln(n^2)}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n}.$$

On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

18. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k$.
On suppose ici que $a>0$ et $b>0$. Commençons par calculer l'expression dont on cherche la limite. On obtient, si $b\neq 1$

$$\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k = \frac{b}{1-b}\frac{1-b^n}{a^n}.$$

Et si $b=1$, on obtient $\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k = \frac{n}{a^n}$. Etudions alors des cas :

- ⋆ Si $b>1$:
On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{-b}{1-b}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} -b^n$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent. Ainsi, on obtient les cas suivants :
Si $b<a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
Si $b=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{-b}{1-b}$
Si $b>a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $0<b<1$:
On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{b}{1-b}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent.. Ainsi, on obtient les cas suivants :
Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-b}$
Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- ⋆ Si $b=1$:
On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{a^n}$. Ainsi, on obtient les cas suivants :
Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par croissance comparée
Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

19. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2\times\left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.

Correction 7. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. $\mathbf{u_n = e^{n^2+n+1}}$:
   - Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $\mathbf{u_n = e^{2n} - e^{n}}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2n}. On obtient que : $u_n = e^{2n}(1-e^{-n})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. $\mathbf{u_n = \dfrac{e^n + n^2 + n + 1}{e^{2n} + 1}}$

- FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^n) et au dénominateur e^{2n}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. $\mathbf{u_n = \dfrac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n}}}$:

- Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

5. $\mathbf{u_n = e^{n^2} - e^{n+1}}$:

- FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{n^2}. On obtient que $u_n = e^{n^2}(1 - e^{-n^2+n+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 + n + 1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

6. $\mathbf{u_n} = \ln\left(\mathbf{\dfrac{e^n + 1}{e^n - 1}}\right)$

- FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n. On obtient alors $u_n = \ln\left(\dfrac{1 + e^{-n}}{1 - e^{-n}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

7. $\mathbf{u_n} = \ln\left(\mathbf{\dfrac{e^n + n^2}{2n + 1}}\right)$

- FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n au numérateur et n au dénominateur. On obtient que : $u_n = \ln\left(\dfrac{e^n}{n} \times \dfrac{1 + \frac{n^2}{e^n}}{2 + \frac{1}{n}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

8. $\mathbf{u_n} = \ln\left(\mathbf{\dfrac{2 - n}{n + 4}}\right)$: Pas définie pour $n > 2$!

9. $\mathbf{u_n = \dfrac{2^n}{n^2 + 1}}$:

- FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur n^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $u_n = \dfrac{e^{\ln 2n}}{n^2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\ln 2n}}{n^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

10. $\mathbf{u_n} = \left(\mathbf{\dfrac{1}{2}}\right)^{\mathbf{n}} \ln \mathbf{n}$

- FI car $u_n = \ln(n) e^{-n \ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par n. On obtient que : $u_n = \dfrac{n}{e^{\ln 2n}} \times \dfrac{\ln n}{n}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{e^{\ln 2n}} = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

11. $\mathbf{u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}}$

- FI donc on transforme l'enpression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par enemple $n = \sqrt{n}$ et on obtient que $u_n = u_n = \dfrac{e^n}{n^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

12. $\mathbf{u_n = e^n - n^{\frac{2}{3}}}$:
   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^n. On obtient que : $u_n = e^n\left(1 - \dfrac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
13. $\mathbf{u_n = e^{\frac{1}{n-2}}}$
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$
14. $\mathbf{u_n = (2n-1)e^{\frac{1}{n-2}}}$:
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
15. $\mathbf{u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n}}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant n^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $u_n = 2\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}$. Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

III Etude de suites

Correction 8.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \dfrac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a
     $$u_{n+1} > 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \ \Leftrightarrow\ 5u_n - 2 > u_n + 2 \ \Leftrightarrow\ u_n > 1.$$
     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3,\ u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{5u_n - 2 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{5u_n - 2 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{3u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{3}{4}\frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme 2.

4. On en déduit la formule explicite de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$

5. Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 9.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1-u_n)^2$.
2. On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad v_n = v_0^{2^n}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
   On a : $v_0^{2^0} = v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient
   $$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

   On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - (1-u_0)^{2^n}$.
   - Si $1 - u_0 > 1 \Leftrightarrow u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   - Si $u_0 = 0$, alors $1 - u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $-1 < 1 - u_0 < 1 \Leftrightarrow 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   - Si $u_0 = 2$, alors $1 - u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $1 - u_0 < -1 \Leftrightarrow u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Correction 10. **On définit deux suites $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ par**

$$\mathbf{u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}}.$$

1. **On pose, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{w_n = v_n - u_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{w_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12} w_n.$$
Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
$$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$

2. **Montrer que $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes :**
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
     Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leq 0.$$
     Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   - Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
     On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$. Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$
3. **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{t_n = 3u_n + 8v_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{t_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   - Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
     Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi
     $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
   - Calcul de la valeur de la limite l :
     Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite l et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11l$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n + 8v_n = 99$, on obtient donc que
     $$11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9.}$$

Correction 11. **Soient $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\mathbf{a_0 = 0}$, $\mathbf{b_0 = 1}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$**

$$\mathbf{a_{n+1} = -2a_n + b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 3a_n}.$$

1. **Démontrer que la suite $(\mathbf{a_n + b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est constante :**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n.$$
   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$

2. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{a_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique .

   - Calcul de la limite éventuelle : on résout : $l = 1 - 3l \Leftrightarrow l = \dfrac{1}{4}$.
   - Étude d'une suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n - \dfrac{1}{4}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

     $$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3a_n - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = -3v_n.$$

     Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.
     On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = -\dfrac{1}{4}(-3)^n$.
   - Expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = v_n + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}(-3)^n + \dfrac{1}{4}$.On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$

3. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{b_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$