Correction DS 3

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice aux sommes

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

1. Soit S l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{ix} = 1$. Déterminer S.
2. Déterminer $C_n(x)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour $x \in S$.
3. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour $q \neq 1$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ en fonction de n pour $x \notin S$.
4. On considère $Z_n(x) = C_n(x) + iS_n(x)$. Montrer pour $x \notin S$:

$$Z_n(x) = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

5. En déduire la valeur de $C_n(x)$ en fonction de x, pour $x \notin S$.

Correction 1.

1. $e^{ix} = 1 \iff \cos(x) + i\sin(x) = 1 \iff \begin{cases} \cos(x) & = 1 \\ \sin(x) & = 0 \end{cases} \iff x \in \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{S = \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. Si $x \in S$ alors $x = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(kx) = \cos(2\pi km) = 1$. Ainsi

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S, C_n(x) = n+1}$$

3. Pour tout $q \neq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

Donc si $x \notin S$, $e^{ix} \neq 1$ et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}}$$

4. En utilisant la linéarité de la somme et la question précédente on obtient pour $x \notin S$:

$$\begin{aligned}
Z_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}
\end{aligned}$$

On va transformer l'expression pour faire apparaitre les sinus :

$$\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)}{e^{i\frac{1}{2}x}\left(e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}\right)}$$

et par ailleurs on a $e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x} = -2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$ et $e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x} = -2i\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.
On obtient finalement

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} &= e^{i\frac{n+1}{2}x - i\frac{1}{2}x} \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
&= e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}
\end{aligned}$$

On trouve bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \notin S, Z_n(x) = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}}$$

5. Par définition de Z_n, on a $C_n(x) = \mathfrak{Re}(Z_n(x))$ Donc

$$C_n(x) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)$$

$$\boxed{C_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}}$$

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les relations suivantes :

$$(R) \,:\, u_{n+1} = 2u_n + n^2 \quad \text{et} \quad (CI) u_0 = 1$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = an^2 + bn + c$ où (a, b, c) sont trois réels.

1. Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = 2v_n + n^2$$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une des suites précédentes et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_n = u_n - v_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

3. En déduire l'expression de x_n en fonction de n puis de u_n.

Correction 2.

1. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation (R) on a alors

$$a(n+1)^2+b(n+1)+c=2(an^2+bn+c)+n^2$$

Et donc

$$a(n^2+2n+1)+bn+b+c=2an^2+2bn+2c+n^2$$

En regroupant les différents termes on obtient

$$an^2+(2a+b)n+a+b+c=(2a+1)n^2+2bn+2c$$

et en identifiant on a :

$$\begin{cases} a & =2a+1 \\ 2a+b & =2b \\ a+b+c & =2c \end{cases} \iff \begin{cases} a & =-1 \\ b & =-2 \\ c & =-3 \end{cases}$$

$$\boxed{v_n=-n^2-2n-3}$$

2. Soit $x_n=u_n-v_n$, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation (R) on obtient pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= u_{n+1}-v_{n+1} \\ &= 2u_n+n^2-2v_n+n^2 \\ &= 2u_n-2v_n \\ &= 2x_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison 2.}}$$

3. On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $x_n=x_0 2^n$ et $x_0=u_0-v_0=1-(-3)=4$ donc

$$\boxed{x_n=4\times 2^n}$$

or $u_n=x_n+v_n$ et donc

$$\boxed{u_n=4\times 2^n-n^2-2n-3}$$

Exercice 3. 1. Donner en fonction du paramétre $\lambda\in\mathbb{R}$ le rang du système :

$$(S_\lambda)\ :\ \begin{cases} 8x+5y & =\lambda x \\ -10x-7y & =\lambda y \end{cases}$$

2. On appelle Σ l'ensemble des valeurs telles que le système (S_λ) **n'est pas** de Cramer. Déterminer Σ.
3. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\in\Sigma$.
4. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\notin\Sigma$.

Correction 3.

1.

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrl} (8-\lambda)x & + & 5y & =0 \\ -10x & + & (-7-\lambda)y & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7-\lambda)y & =0 \\ (8-\lambda)x & + & 5y & =0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow 10L_2+(8-\lambda)L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7-\lambda)y & =0 \\ & & (5\times 10+(8-\lambda)(-7-\lambda))y & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7-\lambda)y & =0 \\ & & (50+(\lambda^2-\lambda-56))y & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7-\lambda)y & =0 \\ & & (\lambda^2-\lambda-6)y & =0 \end{array}\right.$$

Regardons maintenant les racines de $(\lambda^2-\lambda-6)$. Le discriminant vaut $\Delta = 1+24 = 25 > 0$. Il y a donc deux racines réelles :

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3$$

<u>Si $\lambda_1 \notin \{-2,3\}$</u> alors $(\lambda^2-\lambda-6) \neq 0$ et

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2}}$$

<u>Si $\lambda=-2$ ou $\lambda=3$</u> alors $(\lambda^2-\lambda-6) = 0$ et

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1}}$$

2. $\Sigma = \{-2,3\}$ d'après la question précédente.
3. <u>Si $\lambda=-2$</u> alors

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7+2)y & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & -5y & =0 \end{array}\right.$$

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rl} x & = \frac{-1}{2}y \end{array}\right.$$

Pour $\lambda=-2$ les solutions sont :

$$\boxed{S = \{(\tfrac{-1}{2}y, y)\,|\, y \in \mathbb{R}\}}$$

<u>Si $\lambda = 3$</u> alors

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & (-7-3)y & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrl} -10x & + & -10y & =0 \end{array}\right.$$

$$(S_\lambda) \iff \left\{\begin{array}{rl} x & = -1y \end{array}\right.$$

Pour $\lambda=3$ les solutions sont :

$$\boxed{S = \{(-y, y)\,|\, y \in \mathbb{R}\}}$$

4. <u>Si $\lambda \notin \Sigma$</u> alors Le système est de Cramer, comme il est homogéne $(0,0)$ est solution.

$$\boxed{S = \{(0,0)\}}$$

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations suivantes[1] :

$$(R)\ :\ \left\{\begin{array}{rl} u_{n+1} & = 8u_n + 5v_n \\ v_{n+1} & = -10u_n - 7v_n \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad u_0 = 1, v_0 = 1.$$

On propose deux solutions distinctes.

1. Bien que les coéfficients soient les mêmes que dans l'exercice précédent les deux exercices sont indépendants.

Méthode 1

1. On considère $X_n = 2u_n + v_n$ et $Y_n = u_n + v_n$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.
2. En déduire la valeur de X_n et Y_n en fonction de n.
3. Résoudre le système d'inconnue $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètres $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$

$$(P) : \begin{cases} 2U + V & = X \\ U + V & = Y \end{cases}$$

4. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de X_n et Y_n.
5. Conclure en donnant l'expression de X_n en fonction de n.

Méthode 2

1. A l'aide[2] de la relation (R), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

2. En déduire l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Correction 4. Méthode 1

1.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 2u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 2(8u_n + 5v_n) - 10u_n - 7v_n \\ &= 6u_n + 3v_n \\ &= 3(2u_n + v_n) \\ &= 3X_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } 3}$$

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 8u_n + 5v_n - 10u_n - 7v_n \\ &= -2u_n - 2v_n \\ &= -2(u_n + v_n) \\ &= -2Y_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } -2}$$

2. $X_0 = 2u_0 + v_0 = 3$ et $Y_0 = u_0 + v_0 = 2$ Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = 3 \times 3^n \quad \text{et} \quad Y_n = 2(-2)^n}$$

3.

$$(P) : \begin{cases} 2U + V & = X \\ U + V & = Y \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2U & + & V & = X \\ & & V & = 2Y - X \end{cases}$$

$$(P) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2U & + & 2Y - X & = X \\ & & V & = 2Y - X \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} U & = -Y + X \\ V & = 2Y - X \end{cases}$$

Les solutions de (P) sont :

2. Au cours des calculs il est judicieux de garder des formules factorisées $(5 \times 7 = 7 \times 5)$...

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-Y + X, 2Y - X)\}}$$

4. La question précédente montre que

$$\boxed{u_n = -Y_n + X_n \quad \text{et} \quad v_n = 2Y_n - X_n}$$

5. On obtient alors en remplacant les valeurs de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\boxed{u_n = -2(-2)^n + 3 \times 3^n = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Methode 2

1. D'aprés la premiere condition de la relation (R) on a

$$u_{n+2} = 8u_{n+1} + 5v_{n+1}$$

Or $v_{n+1} = (-10u_n - 7v_n)$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 8u_{n+1} + 5(-10u_n - 7v_n) \\ &= 8u_{n+1} - 50u_n - 7 \times 5v_n \end{aligned}$$

Or $5v_n = u_{n+1} - 8u_n$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 8u_{n+1} - 50u_n - 7 \times (u_{n+1} - 8u_n) \\ &= u_{n+1} + 6u_n \end{aligned}$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $X^2 = X+6$ On cherche donc les racines de X^2-X-6. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. Il y a donc deux racines réelles :

$$x_1 = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 3$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit alors
$$u_n = A(-2)^n + B3^n$$
où A, B sont deux réels à déterminer.
Comme $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = 8 + 5 = 13 = -2A + 3B$ on tombe sur

$$A = (-2) \quad \text{et} \quad B = 3$$

On obtient de nouveau :

$$\boxed{u_n = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Exercice 5. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. `Script1.py`

```
a=0
n=10
for i in range(n):
  a=a+i^3
print(a/25)
```

2. `Script2.py`

```
a=0
x=3.1415926
while a<x:
  a=a+1
print(a)
```

3. `Script3.py` On rappelle que `floor` calcule la partie entière d'un nombre

```
from math import floor
x=12
a=0
b=100
c=50
for i in range(4):
  if c>x:
    b=c
    c=floor((a+b)/2)
  else:
    a=c
    c=floor((a+b)/2)
  print(a,b,c)
```

4. `Script4.py`

```
a=78
for i in range(1,79):
  if a%i==0:
    print(i)
```

5. Ecrire un script Python qui permet d'afficher les termes de 0 à 100 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

6. Ecrire un script Python qui permet d'afficher le terme u_{100} de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n^2.$$

On pourra ici considérer deux variables `u`, `v` qui correspondent respectivement à u_n et u_{n+1}