DS 3

Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice aux sommes

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) \quad \text{et} \quad S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$

1. Soit S l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tel que $e^{ix}=1$. Déterminer S.
2. Déterminer $C_n(x)$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$ pour $x\in S$.
3. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$ pour $q\neq 1$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ en fonction de n pour $x\notin S$.
4. On considère $Z_n(x)=C_n(x)+iS_n(x)$. Montrer pour $x\notin S$:

$$Z_n(x)=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

5. En déduire la valeur de $C_n(x)$ en fonction de x, pour $x\notin S$.

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les relations suivantes :

$$(R)\ :\ u_{n+1}=2u_n+n^2 \quad \text{et} \quad (CI)u_0=1$$

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=an^2+bn+c$ où (a,b,c) sont trois réels.

1. Déterminer les triplets $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=2v_n+n^2$$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une des suites précédentes et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_n=u_n-v_n$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. En déduire l'expression de x_n en fonction de n puis de u_n.

Exercice 3.

1. Donner en fonction du paramétre $\lambda\in\mathbb{R}$ le rang du système :

$$(S_\lambda)\ :\ \begin{cases} 8x+5y &= \lambda x \\ -10x-7y &= \lambda y \end{cases}$$

2. On appelle Σ l'ensemble des valeurs telles que le système (S_λ) **n'est pas** de Cramer. Déterminer Σ.
3. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\in\Sigma$.
4. Résoudre (S_λ) pour $\lambda\notin\Sigma$.

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations suivantes[1] :

$$(R)\ :\ \begin{cases} u_{n+1} &= 8u_n+5v_n \\ v_{n+1} &= -10u_n-7v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad u_0=1, v_0=1.$$

On propose deux solutions distinctes.

1. Bien que les coéfficients soient les mêmes que dans l'exercice précédent les deux exercices sont indépendants.

Méthode 1

1. On considère $X_n = 2u_n + v_n$ et $Y_n = u_n + v_n$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques.
2. En déduire la valeur de X_n et Y_n en fonction de n.
3. Résoudre le système d'inconnue $(U, V) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètres $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$

$$(P) : \left\{ \begin{array}{ll} 2U + V & = X \\ U + V & = Y \end{array} \right.$$

4. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de X_n et Y_n.
5. Conclure en donnant l'expression de X_n en fonction de n.

Méthode 2

1. A l'aide[2] de la relation (R), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

2. En déduire l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. `Script1.py`

```python
a=0
n=10
for i in range(n):
  a=a+i^3
print(a/25)
```

2. `Script2.py`

```python
a=0
x=3.1415926
while a<x:
  a=a+1
print(a)
```

3. `Script3.py` On rappelle que `floor` calcule la partie entière d'un nombre

```python
from math import floor
x=12
a=0
b=100
c=50
for i in range(4):
  if c>x:
    b=c
    c=floor((a+b)/2)
  else:
    a=c
    c=floor((a+b)/2)
  print(a,b,c)
```

4. `Script4.py`

```python
a=78
for i in range(1,79):
  if a%i==0:
    print(i)
```

5. Ecrire un script Python qui permet d'afficher les termes de 0 à 100 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

6. Ecrire un script Python qui permet d'afficher le terme u_{100} de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n^2.$$

On pourra ici considérer deux variables `u`, `v` qui correspondent respectivement à u_n et u_{n+1}

2. Au cours des calculs il est judicieux de garder des formules factorisées ($5 \times 7 = 7 \times 5$)...