Correction TD 8 - Suites réelles

I Monotonie et convergence

Correction 1. Étude de la monotonie des suites suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}-(n+1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+n=\frac{1}{2^{n+1}}-1.$$
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2^{n+1}}<1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plutôt de type produit. Comme tous ses termes sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. On obtient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}\times\frac{2^{n+1}}{n!}=\frac{n+1}{2}.$$
Un calcul rapide donne
$$\frac{n+1}{2}<1\Leftrightarrow n+1<2\Leftrightarrow n<1.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante ou encorrectione la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n=f(n)$ avec
$$f:\ x\mapsto f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$
L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$
Étudions le signe de $1-\ln x$ ($x^2\geq 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1-\ln x$) :
$1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}\\ &= \frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2}\\ &= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}.\end{aligned}$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

5. On remarque que
$$u_{n+1}-u_n = n+1+2(-1)^{n+1}-n-2(-1)^n = 1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1} = 1+4(-1)^{n+1}.$$
Ainsi, si $n=2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p}=5>0$ et si $n=2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1}=-3<0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > 0.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 2. Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}=+\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0)=1$.
2. On a ici une forme indéterminée avec une différence de racines. L'idée est d'utiliser la quantitée conjuguée :
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
Par quotient de limites, on obtient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)-\ln(n^2)=-\infty$ en utilisant $\ln\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).
5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+n}{2^n}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n=e^{n\ln 2}$.
6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ par le théorème des gendarmes et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n^3)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3\ln(n)}{n}=0$ par croissance comparée.
7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}$ en écrivant que $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}=-1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.
9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ en utilisant un correctionollaire du théorème des gendarmes car $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\leq\dfrac{1}{n}$ ou le théorème des gendarmes.
10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0\leq\dfrac{1+(-1)^n}{n}\leq\dfrac{2}{n}$.
11. $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n\cos n+2=+\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le correctionollaire du théorème des gendarmes avec $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right|\leq\dfrac{1}{n}$.
12. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=0$ en utilisant la définition des factorielles.

13. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n+n) = +\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.

14. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ car $n^{1/n} = e^{1/n \ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

15. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^n = +\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire que $(\ln n)^n = e^{n\ln(\ln n)}$.

16. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{e^{n\ln 2}} = 0$.

17. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :
$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{1/n\ln(n^2+n+1)}.$$
Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors
$$\frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = \frac{\ln(n^2)}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}{n}.$$
On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

18. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k$.
On suppose ici que $a>0$ et $b>0$. Commençons par calculer l'expression dont on cherche la limite. On obtient, si $b\neq 1$
$$\frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k = \frac{b}{1-b}\frac{1-b^n}{a^n}.$$
Et si $b=1$, on obtient $\dfrac{1}{a^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b^k = \dfrac{n}{a^n}$. Etudions alors des cas :
    - $\star$ Si $b>1$:
      On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-b}{1-b}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} -b^n$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent. Ainsi, on obtient les cas suivants :
      Si $b<a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
      Si $b=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-b}{1-b}$
      Si $b>a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
    - $\star$ Si $0<b<1$:
      On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{b}{1-b}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ car $1-b^n \underset{+\infty}{\sim} 1$ et en utilisant ensuite les propriétés sur le produit et le quotient d'équivalent.. Ainsi, on obtient les cas suivants :
      Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
      Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-b}$
      Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
    - $\star$ Si $b=1$:
      On a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{a^n}$. Ainsi, on obtient les cas suivants :
      Si $a>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par croissance comparée
      Si $a=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
      Si $a<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

19. $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2\times\left(-\frac{1}{2n^2}\right)=-\frac{1}{2}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\frac{1}{2}$.

Correction 3. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. $\mathbf{u_n=e^{n^2+n+1}}$:
   - Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
2. $\mathbf{u_n=e^{2n}-e^n}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2n}. On obtient que : $u_n=e^{2n}(1-e^{-n})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
3. $\mathbf{u_n=\dfrac{e^n+n^2+n+1}{e^{2n}+1}}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^n) et au dénominateur e^{2n}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.
4. $\mathbf{u_n=\dfrac{n}{n-1}e^{\frac{1}{n}}}$:
   - Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}=1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$.
5. $\mathbf{u_n=e^{n^2}-e^{n+1}}$:
   - FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{n^2}. On obtient que $u_n=e^{n^2}(1-e^{-n^2+n+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{n\to+\infty} -n^2+n+1=-\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
6. $\mathbf{u_n=\ln\left(\dfrac{e^n+1}{e^n-1}\right)}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n. On obtient alors $u_n=\ln\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.
7. $\mathbf{u_n=\ln\left(\dfrac{e^n+n^2}{2n+1}\right)}$
   - FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^n au numérateur et n au dénominateur. On obtient que : $u_n=\ln\left(\frac{e^n}{n}\times\frac{1+\frac{n^2}{e^n}}{2+\frac{1}{n}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n}=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^n}=0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
8. $\mathbf{u_n=\ln\left(\dfrac{2-n}{n+4}\right)}$: Pas définie pour $n>2$!
9. $\mathbf{u_n=\dfrac{2^n}{n^2+1}}$:
   - FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur n^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $u_n=\frac{e^{\ln 2n}}{n^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln 2n}}{n^2}=+\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

10. $\mathbf{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln n}$

- FI car $u_n = \ln(n)e^{-n\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par n. On obtient que : $u_n = \frac{n}{e^{\ln 2n}} \times \frac{\ln n}{n}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{\ln 2n}} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

11. $\mathbf{u_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}}$

- FI donc on transforme l'enpression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par enemple $n = \sqrt{n}$ et on obtient que $u_n = u_n = \frac{e^n}{n^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

12. $\mathbf{u_n = e^n - n^{\frac{2}{3}}}$:

- FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^n. On obtient que : $u_n = e^n\left(1 - \frac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}}{e^n} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

13. $\mathbf{u_n = e^{\frac{1}{n-2}}}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

14. $\mathbf{u_n = (2n-1)e^{\frac{1}{n-2}}}$:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

15. $\mathbf{u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n}}$

- FI donc on met en facteur le terme dominant n^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $u_n = 2\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II Etude de suites

Correction 4.

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   - On montre par récurrence sur $n \geq 3$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n défini et $u_n > 1$.
   - Initialisation : pour $n = 3$:
     On a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \frac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a

$$u_{n+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} > 1 \Leftrightarrow 5u_n - 2 > u_n + 2 \Leftrightarrow u_n > 1.$$

     Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathcal{P}(n)$, et donc que $u_n + 2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geq 3,\ u_n > 1$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car $u_0,\ u_1,\ u_2$ ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.
4. On en déduit la formule explicite de v_n :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$
En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1} \Rightarrow u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}.$$
5. Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}} u_n = 2$.

Correction 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1-u_n)^2$.
2. On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad v_n = v_0^{2^n}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
   On a : $v_0^{2^0} = v_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient
   $$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

   On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - (1-u_0)^{2^n}$.
   - Si $1 - u_0 > 1 \ \Leftrightarrow\ u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
   - Si $u_0 = 0$, alors $1 - u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $-1 < 1 - u_0 < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   - Si $u_0 = 2$, alors $1 - u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $1 - u_0 < -1 \ \Leftrightarrow\ u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Correction 6. **On définit deux suites $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ par**
$$\mathbf{u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}}.$$

1. **On pose, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{w_n} = \mathbf{v_n} - \mathbf{u_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{w_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
   $$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$
   Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
   $$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$
2. **Montrer que $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes :**
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
     Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
     Soit $n \geq 1$, on a :
     $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
     Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leq 0.$$
     Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   - Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
     On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$. Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$
3. **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbf{t_n} = \mathbf{3u_n} + \mathbf{8v_n}$. Donner l'expression de $(\mathbf{t_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$ et $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^\star}$:**
   - Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
     Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi
     $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
   - Calcul de la valeur de la limite l :
     Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite l et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 11l$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n + 8v_n = 99$, on obtient donc que
     $$11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9.}$$

Correction 7. **Soient $(\mathbf{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\mathbf{a_0 = 0}$, $\mathbf{b_0 = 1}$ et pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$**

$$\mathbf{a_{n+1} = -2a_n + b_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b_{n+1} = 3a_n}.$$

1. **Démontrer que la suite $(\mathbf{a_n + b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante :**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n.$$
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{a_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique .
   - Calcul de la limite éventuelle : on résout : $l = 1 - 3l \Leftrightarrow l = \dfrac{1}{4}$.
   - Étude d'une suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = a_n - \dfrac{1}{4}$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = 1 - 3a_n - \frac{1}{4} = -3\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = -3v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.
   On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = -\dfrac{1}{4}(-3)^n$.
   - Expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = v_n + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}(-3)^n + \dfrac{1}{4}$.On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$
3. **Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbf{b_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$:**
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$

III Suite récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Correction 8.

1. **Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 3$ associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{3}{2}x - 2$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$ 2	$\nearrow$	$+\infty$

- Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction** $g : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 3$ **:**
   Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 2. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 2.}$
3. **Calculer les limites éventuelles de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On a donc :
     - ∘ La suite converge vers l.
     - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

     Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
   - ⋆ De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
   - ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$
   - ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 2$.
     $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 2.}$
4. **On suppose que** $u_0 > 2$ **:**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **:** $u_n > 2$ **:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $[2, +\infty[$, et $f(2) = 2$. Donc pour tout $x \in [2, +\infty[$, $f(x) > 2$ et l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f.
   On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n > 2$.
   - ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 > 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 2$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, l'intervalle $]2, +\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 2.}$

   (b) **Étudier la monotonie de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

   (c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:**
   - ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
   - ⋆ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
     - ∘ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
     - ∘ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

     D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 2$. Ainsi on obtient que : $l > 2$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$
5. **On suppose que** $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$ **:**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \left]\frac{2}{3}, 2\right[$:**

On peut commencer par montrer que l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f. Attention, ici f n'est pas monotone sur $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$, il faut donc traiter les deux intervalles $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ et $\left]\frac{4}{3}, 2\right]$ séparemment.

Sur $\left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3}, 2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

Sur $\left]\frac{4}{3}, 2\right]$, f est strictement croissante et $f(2) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{4}{3}, 2\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3}, 2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

En en déduit que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$, on a bien $f(x) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$: l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  De plus, $u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Or l'intervalle $\left]\frac{2}{3}, 2\right[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 2, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 2.}}$

Correction 9.

1. **Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ associée :**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2}{3}x - 1$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	3	$\frac{9}{4}$	3	$+\infty$

- Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. **Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$:**
   Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 3. Ainsi
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 3.}$
3. **Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - ⋆ On a donc :
     - ∘ La suite converge vers l.
     - ∘ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en l.

     Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
   - ⋆ De plus on a : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
   - ⋆ On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $l = f(l)/$
   - ⋆ On a donc : $l = f(l) \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = 3$.
     $\boxed{\text{La seule limite éventuelle est } 3.}$
4. **Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$? :**
   - Cas 1 : si $u_0 = 3$:
     Comme 3 est le point fixe de f, on a : $u_1 = f(u_0) = f(3) = 3$ puis $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$... On montre alors par récurrence que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$
   - Cas 2 : si $u_0 = 0$:
     On a par définition de la suite : $u_1 = f(u_0) = f(0) = 3$. Mais comme 3 est le point fixe de la fonction f, on a alors $u_2 = f(u_1) = f(3) = 3$ puis $u_3 = f(u_2) = f(3) = 3$... On montre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que
     $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire égale à 3 et donc qu'elle converge vers 3.}}$
5. **On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.**
   (a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0, 3[$:**
   On peut commencer par montrer que l'intervalle $]0, 3[$ est stable par f. On traite ici les intervalles $\left]0, \frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$ séparemment.
   La fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{3}{2}\right]$, et $f(0) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in \left]0, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right]$, donc $f(x) \in]0, 3[$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}, 3\right[$, et $f(3) = 3$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Donc pour tout $x \in$

$\left[\frac{3}{2},3\right[, f(x) \in \left]\frac{9}{4},3\right]$, donc $f(x) \in]0,3[$.
Ainsi, pour tout $x \in]0,3[$, $f(x) \in]0,3[$, et donc l'intervalle $]0,3[$ est stable par f.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \in]0,3[$.

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
  Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 \in]0,3[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0,3[$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in]0,3[$. Or l'intervalle $]0,3[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in]0,3[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in]0,3[$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,3[.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- ⋆ Comme la seule limite éventuelle est 3, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 3.}}$

6. **On suppose que $u_0 > 3$.**

(a) **Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$:**
On peut commencer par montrer que l'intervalle $]3,+\infty[$ est stable par f. On a f strictement croissante sur $]3,+\infty[$, et $f(3) = 3$, donc pour tout $x \in]3,+\infty[$, $f(x) > 3$ et l'intervalle $]3,+\infty[$ est stable par f.

- ⋆ On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n): \ u_n \text{ existe et } u_n > 3.$$

- ⋆ Initialisation : pour $n = 0$:
  Par définition de la suite, on a bien que u_0 existe et $u_0 > 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ⋆ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. En particulier u_n existe et $u_n \in \mathcal{D}_f$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe.
  - ∘ Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 3$. Or l'intervalle $]3,+\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 3$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 3$.

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- ⋆ Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
  $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 3.}$

(b) **Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

(c) **Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**

- ⋆ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
- ⋆ On suppose par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. On a alors :
  - ∘ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
  - ∘ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.

  D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $l \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 3$. Ainsi on obtient que : $l > 3$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

7. **On suppose que $u_0 < 0$.**
   (a) **Montrer que $u_1 > 3$:**
   On a :
   - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction polynomiale.
   - ⋆ La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
   - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 3$

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f(]-\infty, 0[) =]3, +\infty[$. Or on a supposé que $u_0 \in]-\infty, 0[$ donc $f(u_0) \in]3, +\infty[$, à savoir $u_1 \in]3, +\infty[$. Donc on a bien $\boxed{u_1 > 3.}$

   (b) **En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:**
   La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ a donc un terme initial $u_1 > 3$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ se comporte comme la suite de la question 5 et en particulier elle diverge vers $+\infty$. Mais le comportement à l'infini d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$

Correction 10. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \dfrac{(1+x)^2}{4}$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1+x}{2}.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$+$			
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant
   $$l = f(l) \Leftrightarrow l = 1.$$
   Ainsi, 1 est la seule limite éventuelle de la suite.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   On remarque que $[0, 1]$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = 0 \in [0, 1]$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1].$$

4. Étude de la monotonie de la suite :
La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0,1]$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
$$u_1 = \frac{1}{4} > u_0.$$
Ainsi, un raisonnement par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. De plus, comme la seule limite éventuelle est 1, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Correction 11. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude. Ainsi la rédaction dans une copie doit être beaucoup plus détaillée qu'ici.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$
La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Un calcul rapide montre qu'il n'y a pas de limite éventuelle.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
On remarque que $[0,+\infty[$ est un intervalle stable par f et que $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0,+\infty[$. Un raisonnement par récurrence permet alors de vérifier que la suite est bien définie et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0.$$
4. Étude de la monotonie de la suite :
La fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $[0,+\infty[$, ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Il suffit alors de comparer u_1 et u_0 et on obtient
$$u_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} > u_0.$$
Ainsi, un raisonnemnt par récurrence permet de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (voir les exemples du cours, le raisonnement par récurrence est obligatoire).
5. Étude de la convergence de la suite :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, on montre par un raisonnement rapide par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

Correction 12. C'est une suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$, on donne les idées de l'étude.

1. Étude de la fonction f associée : $x \mapsto e^x$
   La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x.$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Calcul des limites éventuelles :
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle ne peut converger que vers l vérifiant $l = f(l)$. Étudions alors la fonction $g :\ x \mapsto g(x) = f(x) - x$. L'étude d'une telle fonction donne que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) \geq 1.$$
   En particulier, il n'y a pas de valeur d'annulation de g et donc il n'y a pas de limite éventuelle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. La suite est bien définie et elle appartient à I intervalle stable par f :
   $\mathbb{R}^+$ est un intervalle stable par f et $u_1 > 0$. Ainsi, on montre par récurrence que la suite est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad u_n \geq 0$. (On ne commence pas au rang 0 car $u_0 \in \mathbb{R}$).
4. Étude de la monotonie de la suite :
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 1 > 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Étude de la convergence de la suite :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$. Comme il n'y a pas de limite éventuelle possible, par un raisonnement par l'absurde, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$