DM7

Problème 1. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

   $$\ln(1+x) \leq x.$$

   (e) Montrer à l'aide des questions précédentes que

   $$\ell \geq \ln(2).$$

3. Majoration de la limite.
   (a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

(b) On pose $e_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.

iii. Conclure.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(d) En déduire la valeur de ℓ.