DM8

Le but de ce DM est de calculer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Convergence On note $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 2]$.

Calcul de la limite Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit I_n et J_n par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)dt$$

1. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$
2. (a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$$
(on pourra utiliser que $\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$)
   (b) En déduire que
$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$
3. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2n}I_n$$
   (b) Montrer que
$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2\sin(t))\cos^{2n-2}(t)\sin(t)dt$$
   (c) En utilisant une intégration par parties en déduire que :
$$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n + J_n\right)$$

(d) On désigne par $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $K_n = \frac{J_n}{I_n}$. En utilisant la relation obtenue précédemment, montrer que :

$$\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

puis en déduire que :

$$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Le but de cette question est de montrer que $K_n \to 0$

(a) démontrer que pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

(b) En déduire que pour tout entier n on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)}$$

puis que :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$$

5. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$$