TD 10 : Intégrale et calcul de primitive

I Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1. Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \cos(3x)$
2. $x \mapsto \cos^3(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \mapsto \tan(x)$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
10. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
11. $x \mapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$

Exercice 2. Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+16}$
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$

Exercice 3. Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \mapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \mapsto x\cos^2(x)$
3. $x \mapsto \arctan(x)$
4. $x \mapsto x^2e^{-x}$
5. $x \mapsto x^3e^{-x^2}$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x)|dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)dx$, $n \in \mathbb{N},\ t>0$

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan(x)+\tan^3(x))dx \quad (u=\tan x)$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^3(x)\cos^2(x)dx \quad (u=\cos x)$
3. $\displaystyle\int_0^a\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}dt,\ a>0 \quad (t=a\sin u)$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$
6. $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx \quad (x=u^2-2)$

Exercice 7. À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x\mapsto\dfrac{x}{1+x^4} \quad (u=t^2)$
2. $x\mapsto\dfrac{1}{2+\sqrt{x}} \quad (u=2+\sqrt{t})$
3. $x\mapsto e^{2x}\sin(e^x) \quad (t=e^t)$
4. $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} \quad (u=\sqrt{t})$
5. $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^4(x)} \quad (u=\tan(t))$
6. $x\mapsto\dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)} \quad (u=\sqrt{\sin(t)})$
7. $x\mapsto\dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \quad (u=e^t)$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$
2. $\displaystyle\int_2^3\frac{x+3}{x^2-1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$
4. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}dx$

Exercice 9.
1. Montrer que $\forall x\in[-1,1]$, $\dfrac{x+1}{x^2+4x+5}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}-\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, puis que $\dfrac{1}{x^2+4x+5}=\dfrac{1}{(x+2)^2+1}$. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$
2. Avec la même méthode, calculer $\displaystyle\int_0^2\frac{2x+1}{2x-x^2-4}dx$

Exercice 10.
1. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.
2. Application au calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

II Études de suites définies par des intégrales

Exercice 11. Intégrales de Wallis (on ne peut pas trouver d'exercice plus classique que celui-là....)

Soit n un entier naturel et $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt$.

1. (a) Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n.$$

(b) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)} \times \frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} &= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1)}. \end{aligned}$$

(c) Calculer nI_nI_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{I_n}{I_{n-2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.

   (b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

Exercice 12. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Trouver une formule de récurrence.

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
2. Trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}.
3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 14. On considère la suite d'intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$. Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que : $\dfrac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \dfrac{1}{2}(J_n + J_{n-1})$.
4. Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15. Lemme de Riemann-Lebesgue
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \right) = 0.$$

On pourra commencer par une intégration par parties.