Table des matières

Chapitre : denombrement

I Cardinal d'un ensemble fini

I. 1 Définition

Définition 1. *Définition d'un ensemble fini :*

- *Un ensemble E non vide est un ensemble fini si :*
  . . . .
  On dit alors que E est de cardinal n et on note $\text{Csard}(E) = n$.
- *L'ensemble vide est un ensemble fini et son cardinal est* $\text{Csard}(\emptyset) = \ldots$.

Exemple. *Mme C. n'a réussi à corriger que le quart de la moitié de son paquet de* 48 *copies. Quel est le cardinal de l'ensemble des copies restantes ?*

I. 2 Cardinal d'une union

Union disjointe

❶ Deux ensembles disjoints :

Proposition 2. *Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque* . . . .

. . . .

On a alors : ....

Exercice 3. *On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un 7 ou une figure ?*

❷ Plusieurs ensembles disjoints deux à deux :

Proposition 4. *Des ensembles finis $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints lorsque ....*

On a alors : ....

⚠ Ne pas confondre des ensembles deux à deux disjoints et l'intersection de tous les ensembles est vide.

Union quelconque

❶ Deux ensembles :

Proposition 5. *Soient A et B deux ensembles finis alors*

Remarque. ....

❷ Trois ensembles :

Proposition 6. *Soient A, B et C des ensembles finis alors*

Exercice 7. *Dans une classe de 36 élèves où tous les élèves étudient au moins l'une des langues vivantes suivantes, 22 étudient l'anglais, 22 l'allemand et 18 l'espagnol. On sait en outre que 10 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 11 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'étudiants étudient les trois langues ?*

❸ Généralisation : formule de Poincaré ou formule du crible

La formule de Poincaré est la généralisation des deux formules ci-dessus à une famille finie d'ensembles finis.

Soient $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ des ensembles finis alors :

I. 3 Cardinal d'un complémentaire

Proposition 8. *Soit A un sous ensemble d'un ensemble fini E.*
On note $\overline{A}$ son complémentaire dans E. Alors :

. . . .

Démonstration. ☐

Exercice 9. *Dans un centre de vacances, il y a 50 personnes plus ou moins sportives et de nombreuses activités leur sont proposées : 15 personnes font du tennis, 20 de la piscine, 30 du volley-ball, 10 du tennis de table, 5 du cheval et 4 restent allongées au bord de la piscine toute la journée. Combien de personnes pratiquent au moins un sport ?*

Remarque. *Penser au complémentaire dès que il y a :* . . . .

I. 4 Cardinal d'un produit cartésien

Rappels

Définition 10. *Rappels sur le produit cartésien :*

- *Soient A et B deux ensembles. On note : $A \times B =$* . . . .
- *Soit E un ensemble, on note : $E^p =$* . . . .

Cardinal d'un produit cartésien

Proposition 11. *Cardinal d'un produit cartésien*

- *Soient A et B deux ensembles finis, alors :* . . . .
- *Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^\star$, alors* . . . .

Exemple. *Calcul du cardinal de $A \times B$ avec $A = \{2, 6, 8\}$ et $B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$:*

Exercice 12. *On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 32 cartes.*

1. *Quel est le nombre N de possibilités d'obtenir un roi suivi d'une dame ?*
2. *On tire maintenant successivement 4 cartes du même jeu. Quel est le nombre M de possibilités d'obtenir dans l'ordre un as, un roi, une dame, et un valet ?*

I. 5 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Définition

Définition 13. *Soit E un ensemble.*

- *On note $\mathcal{P}(E)$ ....*
- ....

Exemples.

- *Si $E = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{P}(E) =$* ....
- *Si $E = \{a\}$ alors $\mathcal{P}(E) =$* ....

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble

Proposition 14. *Soit E un ensemble fini, alors :*

$$\text{Csard}(\mathcal{P}(E)) =$$

Démonstration. □

Exemple. *Calculer le nombre de parties des ensembles précédents.*

II Choix de p objets parmi n

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E. Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de tirer p éléments parmi n :

- Avec ordre et répétition,
- Avec ordre et sans répétition,
- Sans ordre et sans répétition,
- Sans ordre et avec répétition.

II. 1 Choix successifs

II. 1. a Listes avec répétitions éventuelles (avec ordre et répétition)

> **Définition 15.** *Soit E un ensemble de cardinal fini n.*
>
> *Une p-liste de E est* ....

Exemple. *Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.*
Donner une 2-liste de E : .... *et une 5-liste de E :* ....

Remarque. ⚠ *Ne pas confondre p-liste avec ensemble à p éléments. Dans une p-liste, l'ordre est important et si on change l'ordre, on change la p-liste. Dans un ensemble à p éléments, l'ordre n'intervient pas et l'ensemble est toujours le même lorsque l'on intervertit des éléments.*
Exemple avec les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(3, 2)$:

> **Proposition 16.** *Avec ordre et répétition :*
> *Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts avec répétition possible et avec ordre est* .... *c'est-à-dire* ....

Démonstration. □

Exemples.
- ***Exemple fondamental : Tirage successif avec remise***
  Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p. On tire successivement p boules dans l'urne, on note le numéro de la boule tirée à chaque fois et l'on remet la boule dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....
- *Nombre de façons de ranger 2 chemises de couleurs différentes dans 3 tiroirs discernables :* ....
- *Nombre de mots de 5 lettres écrits avec les lettres A,B,C,D,E et F :* ....
- *Nombre de répartitions possibles de 5 billes différentes dans 10 boîtes distinctes avec 0, 1 ou plusieurs billes par boîte :* ....

II. 1. b Listes sans répétition (avec ordre et sans répétition)

p-listes sans répétition

Définition 17. *Soit E un ensemble de cardinal fini n.*
Une p-liste de E sans répétition (ou arrangement de p éléments de E) est ....
....

Exemple. *Soit* $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner une 5*-liste sans répétition de E :* ....

Remarque. *Pour qu'il n'y ait pas de répétition, il faut nécessairement que l'on ait* ....

Proposition 18. *Avec ordre et sans répétition :*
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et avec ordre est ....
c'est-à-dire :

Démonstration. □

Remarque. *On utilise parfois la notation $\mathcal{A}_n^p$ (pour "arrangement") pour désigner le nombre de p-listes sans répétition d'un ensemble à n éléments. Ainsi, on a $\mathcal{A}_n^p =$* ....
Par convention, on pose $\mathcal{A}_n^0 = 1$ et $\mathcal{A}_n^p = 0$ si $p > n$.

Exemples.

- ***Exemple fondamental : Tirage successif sans remise***
  Soient une urne contexnant n boules différentes et un entier p. On tire successivement et sans remise p boules dans l'urne. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....
- *Nombre de répartitions possibles de* 5 *billes différentes dans* 10 *boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte :* ....
- *Nombre de paris possibles au tiercé dans une course où 15 chevaux sont en compétition :* ......
- *Nombre de mots de 3 lettres distinctes avec les lettres A,B,C et D :* ....

Permutation

Définition 19. *Soit E un ensemble fini à n éléments.*
On appelle permutation de E ....

Exemple. *Soit* $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Donner un exemple de permutation de E : ....
Doner un exemple de 7*-liste de E qui n'est pas une permutation :* ....

Proposition 20. *Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est* ....

Démonstration. □

Exercice 21. *Nombre de permutations de $[\![1,3]\!]$? de $[\![1,6]\!]$?* ....

Exemple à connaître : Anagrammes

Définition 22. *On appelle anagramme d'un mot* ....

Exemple. *Exemples d'anagramme du mot BCPST :* ....

Calcul du nombre d'anagramme d'un mot :

- Le cas de k lettres distinctes : quel est le nombre d'anagrammes du mot cheval ?
- Le cas de lettres répétées : quel est le nombre d'anagrammes du mot mouton ?

Exercice 23. *Quel est le nombre d'anagrammes du mot mississippi ?*

II. 2 Choix simultanés

II. 2. a Combinaisons (sans ordre et sans répétition)

Définition

Définition 24. *Soient E un ensemble fini de cardinal n.*
On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E ....
....

Exemple. *Soit $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.*
Donner une combinaison à 5 éléments de E : ....

Remarque. *On doit nécessairement avoir* ....

Nombre de combinaisons

Proposition 25. *Sans ordre et sans répétition :*
Le nombre de façons de choisir p objets pris parmi n objets distincts sans répétition possible et sans ordre est ....
c'est-à-dire :

Démonstration. □

Exemples. • ***Exemple fondamental : Tirage simultané non ordonné***
Soient une urne contenant n boules différentes et un entier p. On tire simultanément p boules. Le nombre de résultats possibles d'un tel tirage est ....

• *Nombre de répartitions possibles de* 5 *billes identiques dans* 10 *boîtes distinctes avec au plus une bille par boîte :* ....

Exercice 26. *Jeu de cartes : on distribue 5 cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur, celui-ci dispose donc d'une main de 5 cartes.*

1. *Déterminer le nombre de mains possibles.*
2. *Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 coeurs.*
3. *Déterminer le nombre de mains contenant exactement 2 cartes de pique, 2 cartes de coeur et 1 carte de carreau.*

Exercice 27. *Formule des "chefs" : un sélectionneur de foot doit choisir k joueurs parmi n candidats, et désigner un capitaine parmi les joueurs. En comptant de deux façons différentes le nombre de possibilités, redémontrer la formule des "chefs".*

II. 2. b Choix sans ordre et avec répétition

Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. On verra quelques exemples en TD.

Exemple. *On considère* 5 *boules indiscernables que l'on veut placer dans* 3 *tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à* 5 *boules. Donner le nombre de répartitions possibles.*

III Cardinal et application

Dans toute cette partie, on considère deux ensembles finis E et F de cardinal respectivement p et n.

III. 1 Injectivité, surjectivité, bijectivité et dénombrement

Proposition 28.

- *Il existe une injection de E dans F si et seulement si* ....
- *Il existe une surjection de E dans F si et seulement si* ....
- *Il existe une bijection de E dans F si et seulement si* ....

Démonstration. □

III. 2 Nombre d'applications de E dans F

Proposition 29. *Le nombre d'applications de E dans F est :*

Démonstration. □

III. 3 Nombre d'injections de E dans F

Proposition 30. *On suppose $p \leq n$.*
Le nombre d'applications injectives de E dans F est :

Démonstration. □

III. 4 Nombre de bijections de E dans F

Proposition 31. *Soient E et F deux ensembles finis non vides ayant le même cardinal n.*
Alors le nombre d'applications bijectives de E dans F est :

Démonstration. □