Programme de colle : Semaine 11
Lundi 12 Décembre

I Suites réelles

1. Etude de la monotonie.
2. Etudes des limites de suite de la forme $u_n = f(n)$
3. Croissance comparée : comparaison entre $\ln(n), n^\alpha, e^{\gamma n}, n!, n^n$ [1]
4. Théoréme d'existences de limite :
   (a) Théorème des suites monotones.
   (b) Théorème d'encadrement (gendarmes).
   (c) Théorème des suites adjacentes.

II Etudes des suites de la forme $u_{n+1} = fu_n$

Les exercices doivent être guidés.

1. Etude des variations de f.
2. Etude du signe de $f - Id$.
3. Etude des limites éventuelles (point fixe).

III Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble, d'une union disjointe et d'une union de 2 ensembles quelconques.
2. Cardinal du complémentaire.
3. Cardinal d'un produit cartésien
4. Choix de p objet parmi n.
   (a) Choix avec ordre et répétition (n^p)
   (b) Choix avec ordre sans répétition ($\frac{n!}{(n-p)!}$)
   (c) Choix sans ordre sans répétition ($\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$)

IV Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.

1. Les limites des taux d'accroissement usuels n'ont pas encore été vues

V Exercices Types

1. Étudier la monotonie des suites définies par
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$
2. Etudier les limites des suites suivantes :
   (a) $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$
   (b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   (c) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
   (d) $u_n = e^{n^2+n+1}$
   (e) $u_n = e^{2n} - e^n$
   (f) $u_n = \dfrac{e^n + n^2 + n + 1}{e^{2n} + 1}$
   (g) $u_n = \dfrac{n}{n-1} e^{\frac{1}{n}}$
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.
   (a) Étudier la fonction f associée.
   (b) Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
   (c) Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) On suppose que $u_0 > 2$.
      i. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.
      ii. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      iii. Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) On suppose que $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
      i. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
      ii. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      iii. Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Dans une classe de 36 élèves où tous les élèves étudient au moins l'une des langues vivantes suivantes, 22 étudient l'anglais, 22 l'allemand et 18 l'espagnol. On sait en outre que 10 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 9 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 11 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'étudiants étudient les trois langues ?
5. Dans un centre de vacances, il y a 50 personnes plus ou moins sportives et de nombreuses activités leur sont proposées : 15 personnes font du tennis, 20 de la piscine, 30 du volley-ball, 10 du tennis de table, 5 du cheval et 4 restent allongées au bord de la piscine toute la journée. Combien de personnes pratiquent au moins un sport ?
6. On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si
   (a) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ?
   (b) on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

(c) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents ?

(d) on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques ? (Pas encore vu)

7. Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

   (a) On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.

      i. Donner le nombre de résultats possibles.

      ii. Combien de ces résultats amènent

         A. exactement 1 jeton noir ?

         B. au moins 1 jeton noir ?

         C. au plus un jeton noir ?

         D. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

   (b) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.

   (c) Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.