Correction - DS 4

Exercice 1.

1. Résoudre l'inéquation :

$$(E_1) \quad : \quad 2x-1 \leq \frac{1}{2x+1}$$

2. En déduire les solutions de (E_2) sur $[0, 2\pi[$

$$(E_2) \quad : \quad 2\cos(X)-1 \leq \frac{1}{2\cos(X)+1}$$

Correction 1.

1.

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff 2x-1-\frac{1}{2x+1} \leq 0\\ &\iff \frac{4x^2-1-1}{2x+1} \leq 0\\ &\iff \frac{4x^2-2}{2x+1} \leq 0\\ &\iff \frac{4(x+\frac{1}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}})}{2x+1} \leq 0\end{aligned}$$

On en déduit (après avoir fait un tableau de signe si besoin) les solutions de (E_1)

$$\boxed{S_1 = \left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$$

2. X est solution de (E_2) si et seulement si $\cos(X)$ est solution de (E_1) c'est à dire si et seulement si

$$\cos(X) \in \left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Comme pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\cos(X) \geq -1$ on obtient

$$\cos(X) \in \left[-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

A l'aide du cercle trigonométrique, on trouve les solutions sur $[0, 2\pi[$:

$$X \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right]$$

Exercice 2. Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes et 5 boules rouges. Les boules sont toutes distingables, numérotées par exemple. On tire successivement et avec remise 4 boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent aucune boule rouge ?
3. Combien de tirages amènent que des boules vertes ?

4. Combien de tirages amènent exactement 2 boules jaunes ?
5. Combien de tirages amènent des boules d'une seule couleur ?
6. (INFO) On modélise une boule par une lettre 'J' pour jaune 'V' pour verte et 'R' pour rouge. On modélise l'urne par une liste `U` dont chaque élément element est une boule.
   (a) Créer la liste `U`
   (b) A l'aide de la fonction `randint(a,b)` qui choisit un nombre entier aléatoirement entre a et b (inclus), écrire une fonction `tirage` qui retourne une liste correspondant au 4 tirages successifs dans l'urne.

Correction 2.

1. On fait $4(=p)$ tirages successifs (ordre) avec remise dans un ensemble à 10 éléments ($n = 10$)

$$\boxed{\text{Il y a } 10^4 \text{ tirages possibles}}$$

2. Pour obtenir aucune boule rouge il faut tirer des boules vertes ou jaunes, il y en a 5. On a donc

$$\boxed{\text{Il y a } 5^4 \text{ tirages possibles sans boule rouge}}$$

3. Il y a 2 boules vertes donc

$$\boxed{\text{Il y a } 2^4 \text{ tirages possibles avec que des boules vertes}}$$

4. Il faut tirer 2 boules jaunes (3 possibilités) et 2 boules parmi les vertes ou rouges (7 possiblités). Ensuite il faut positionner les boules jaunes parmi les 4 tirages, cela fait $\binom{4}{2}$ positions possibles.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{4}{2}3^2 7^2 \text{ tirages possibles exactement 2 boules jaunes}}$$

5. Pour obtenir qu'une seule couleur on a 3 façons de faire : que des vertes V , que des jaunes J ou que des rouges R. On a déjà calcule le cardinal de V à la question 3. On fait de même avec J on obtient $\text{Card}(J) = 3^4$ et $\text{Card}(R) = 5^4$. Finalement

$$\boxed{\text{Il y a } 2^4 + 3^4 + 5^4 \text{ tirages qui amènent qu'une seule couleur}}$$

```
U=['J']*3+['V']*2+['R']*5
import random as rd
def tirage(n,U):
   ''' n correspond au nombre de tirages effectue
   U est une liste qui modelise l'urne.
   pour modeliser l experience decrite on appliquera la fonction tirage(4,U)
     '''
    L=[]
    for i in range(n):
      r=rd.randint(0,len(U)-1)
        #attention len(U)-1 est compris dans le tirage aleatoire effectue par
      L=L.append(U[r])
    return(L)
```

Exercice 3. On considère les mains de 5 cartes (tirages simultanés de 5 cartes) que l'on peut obtenir d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement deux as ?
3. Combien y-a-t-il de mains comprenant au moins un coeur ?
4. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement un roi et un coeur ?

Correction 3.

1. C'est un tirage sans ordre et sans répétition.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{52}{5} \text{ mains possibles.}}$$

2. Pour dénombrer les mains avec exactement 2 as, il faut dénombrer le choix de deux as parmi les 4 possibles : $\binom{4}{2}$ puis les 3 cartes parmi les 48 autres possibles : $\binom{48}{3}$. Au final il y a

$$\boxed{\binom{4}{2}\binom{48}{3} \text{ avec exactement 2 as.}}$$

3. On cherche l'événement contraire : les mains comprenant 0 coeur. Il y en a $\binom{52-13}{5}$ Ainsi il y a

$$\boxed{\binom{52}{5} - \binom{39}{5} \text{ mains contenant au moins un coeur.}}$$

4. Soit $E = \{\text{mains contenant exactement un roi et un coeur }\}$. On chercher à déterminer le cardinal de E.
Il faut regarder à part les mains contenant le roi de coeur. Soit

$$A_1 = \{\text{mains contenant le roi de coeur et pas d'autre coeur ni de roi}\}$$

$$A_2 = \{\text{mains contenant le roi -qui n'est pas de coeur - et un coeur -qui n'est pas le roi.}\}$$

On a d'une part

$$\text{Card}(A_1) = \binom{1}{1}\binom{52-16}{5}$$

et d'autre part

$$\text{Card}(A_2) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{52-16}{3}$$

Par ailleurs, on a $E = A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ Donc $\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2)$ et

$$\boxed{\text{Card}(E) = \binom{36}{5} + 3 \times 12\binom{36}{3}}$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sin(x) < x.$$

3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$

5. Montrer que $f(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n.
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}.

Correction 4.

1. On fait une récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $P(n)$ la propriété définie par : "$0 < u_n < \frac{\pi}{2}$"
   Par définition $u_0 = 1$, et on a bien $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ (car $\pi > 3$) Donc la propriété P est vraie au rang 0.
   On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} soit vraie et on va montrer que ceci implique P_{n_0+1}
   En effet, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \in]0,1[\subset]0,\pi/2[$ [1]. Donc si P_{n_0} est vraie, c'est à dire $u_{n_0} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $u_{n_0+1} = \sin(u_{n_0}) \in]0,1[$. De nouveau comme $1 < \frac{\pi}{2}$ ceci implique P_{n_0+1}.
   Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante et $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = f(u_n)$ Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ d'après la question 1, on a donc $f(u_n) < 0$ d'après la question 2. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} \leq u_n$$
   ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) d'après la question 1 et décroissante d'après la question précédente. Par théorème de la limite monotone, la suite converge vers $\ell \geq 0$
5. L'étude de f a montré que $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$, $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$. L'équivalence est bien montrée.
6. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ on a aussi $\lim u_{n+1} = \ell$. De plus, comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ on a $\lim \sin(u_n) = \sin(\lim u_n)$. Ainsi la limite ℓ satisfait $\ell = \sin(\ell)$. Ce qui d'après la question précédente implique $\ell = 0$.
   Finalement
   $$\lim u_n = 0$$

INFO

```python
from math import sin
def u(n):
  x=1    #valeur de u0
  for i in range(n):
     x=sin(x)   #relation de recurrence que l'on applique n fois avec range(n)
  return(x)

from math import abs
def limite(e):
   L=0 #valeur de la limite
   n=0  #on met en place un compteur
   val=u(n)  #valeur de u0

```

[1] en d'autres termes, $]0,\pi/2[$ est stable par la fonction sinus

```
    while abs(val-L)>e: #tant que la valeur de |u(n)-L| est plus grande que e
        n+=1 #on incremente la valeur du compteur de 1
        val =u(n) #on actualise la valeur de u(n)

    return(n, u(n))
```

Exercice 5. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Convergence On note $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n(n!)}$

1. Donner la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(R_n)_{n\geq 1}$
2. En déduire que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_n)_{n\geq 1}$ convergent et ont même limite.

Informatique

1. Ecrire une fonction `factorielle` qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de $n!$
2. Ecrire deux fonctions `S` et `R` qui prennent en argument un entier n et retourne respectivement la valeur de S_n et R_n.
3. Ecrire une fonction `limite` qui prend en argument un réel positif ϵ et retourne la valeur de S_n pour laquelle $|S_n-R_n|\leq\epsilon$ (la premiere valeur pour laquelle cette condition est satisfaite).

Calcul de la limite Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on définit la fonction f_n par

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\quad\text{et}\quad g_n(x)=f_n(x)e^{-x}$$

On rappelle que par convention $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^0=1$, et $0!=1$

1. Exprimer $g_1(x)$ sans le signe somme.
2. Calculer $g_n(0)$ et exprimer $g_n(1)$ à l'aide de S_n.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$$

4. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$ $g_n'(x)=\frac{-x^ne^{-x}}{n!}$
5. (a) Exprimer en fonction de $n\in\mathbb{N}$ la valeur de $\int_0^1\frac{-e^{-x}}{n!}dx$
   (b) A l'aide d'un encadrement de $g_n'(x)$, montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{e^{-1}-1}{n!}\leq\int_0^1 g_n'(x)dx\leq 0$$

6. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{e^{-1}-1}{n!}\leq S_ne^{-1}-1\leq 0$$

7. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 5.

Convergence

1. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Donc

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1)((n+1)!)} - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n-(n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n^2+n+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)((n+1)!)} \end{aligned}$$

donc $R_{n+1} - R_n < 0$, ainsi

$$\boxed{(R_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante}}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n - S_n = \frac{1}{n(n!)}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} R_n - S_n = 0$$

De plus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(R_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Donc les deux suites sont adjacentes.

$$\boxed{\text{Le théorème sur les suites adjacentes assure que les suites convergent et ont même limite.}}$$

Informatique

1.
```
def factorielle(n):
  p=1
  for i in range(1,n+1):
    p=p*i
  return(p)
```

```
def S(n):
  s=0
  for k in range(n+1):
    s=s+1/factorielle(k)
  return(s)

def R(n):
  return(S(n)+1/(n*factorielle(n))
```

3.
```
def limite(epsilon):
  n=1
  while n*factorielle(n) >1/epsilon:
    n=n+1
  return(S(n))
```

Calcul de la limite

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g_1(x) = f_1(x)e^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} e^{-x} = (1+x)e^{-x}$

$$\boxed{g_1(x) = (1+x)e^{-x}}$$

2. $g_n(0) = f_n(0)e^{-0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!} = 1$

$$\boxed{g_n(0) = 1}$$

   $g_n(1) = f_n(1)e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} e^{-1} = S_n e^{-1}$

$$\boxed{g_n(1) = S_n e^{-1}}$$

3. La dérivée d'une somme de fonction est égale à la somme des dérivées des fonctions et $u_k : x \mapsto \frac{x^k}{k!}$ se dérive en

$$u_k'(x) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

   si $k \geq 1$ et $u_0'(x) = 0$
   Ainsi $f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k'(x) = u_0'(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ On fait ensuite le changement de variable $i = k-1$ et on obtient

$$\boxed{f_n'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{(i)!}}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= f_n'(x)e^{-x} - f_n(x)e^{-x} \\ &= (f_n'(x) - f_n(x))e^{-x} \end{aligned}$$

   D'après la question précédente : $f_n'(x) - f_n(x) = -\frac{x^n}{n!}$. On obtient donc

$$\boxed{g_n'(x) = -\frac{x^n e^{-x}}{n!}}$$

5. (a) $\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!} dx = \frac{-1}{n!} \int_0^1 e^{-x} = \frac{-1}{n!}[-e^{-x}]_0^1 = \frac{-1}{n!}(-e^{-1}+1) = \frac{e^{-1}-1}{n!}$

   (b) D'après la question précédente on a pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $x^n \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$ donc

$$g_n'(x) \leq 0$$

   Par positivité de l'intégrale, on a alors

$$\boxed{\int_0^1 g_n'(x)dx \leq 0.}$$

   De même, $x^n \leq 1$ donc

$$g_n'(x) \geq \frac{-e^{-x}}{n!}$$

   Par positivité de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^1 g_n'(x)dx \geq \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!} dx.$$

   Donc

$$\boxed{\frac{e^{-1}-1}{n!} \leq \int_0^1 g_n'(x)dx}$$

6. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 g_n'(x)dx = [g_n(x)]_0^1 = g_n(1) - g_n(0) = S_n e^{-1} - 1$$

Donc d'après la question précédente

$$\boxed{\tfrac{e^{-1}-1}{n!} \leq S_n e^{-1} - 1 \leq 0}$$

7. On a d'après la question précédente

$$\frac{e^{-1}-1}{n!} \leq S_n e^{-1} - 1 \leq 0$$

donc en isolant S_n au milieu des deux inégalités on obtient :

$$e(\frac{e^{-1}-1}{n!} + 1) \leq S_n \leq e$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}-1}{n!} = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} e(\frac{e^{-1}-1}{n!} + 1) = e$$

Ainsi d'après le théorème d'encadrement la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = e}$$