

DS 4 Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. 1. Résoudre l'inéquation :

$$(E_1) \quad : \quad 2x - 1 \leq \frac{1}{2x + 1}$$

2. En déduire les solutions de (E_2) sur $[0, 2\pi[$

$$(E_2) \quad : \quad 2 \cos(X) - 1 \leq \frac{1}{2 \cos(X) + 1}$$

Exercice 2. Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules vertes et 5 boules rouges. Les boules sont toutes distinguables, numérotées par exemple. On tire successivement et avec remise 4 boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent aucune boule rouge ?
3. Combien de tirages amènent que des boules vertes ?
4. Combien de tirages amènent exactement 2 boules jaunes ?
5. Combien de tirages amènent des boules d'une seule couleur ?
6. (INFO) On modélise une boule par une lettre 'J' pour jaune 'V' pour verte et 'R' pour rouge. On modélise l'urne par une liste U dont chaque élément est une boule.
 - (a) Créer la liste U
 - (b) A l'aide de la fonction `randint(a,b)` qui choisit un nombre entier aléatoirement entre a et b (inclus), écrire une fonction `tirage` qui retourne une liste correspondant au 4 tirages successifs dans l'urne.

Exercice 3. On considère les mains de 5 cartes (tirages simultanés de 5 cartes) que l'on peut obtenir d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement deux as ?
3. Combien y-a-t-il de mains comprenant au moins un coeur ?
4. Combien y-a-t-il de mains comprenant exactement un roi et un coeur ?

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
2. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sin(x) < x.$$

3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$
5. Montrer que $f(x) = 0 \iff x = 0$.
6. Déterminer la valeur de ℓ .

Info

1. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n .
2. Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0} .

Exercice 5. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Convergence On note $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $R_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n(n!)}$

1. Donner la monotonie de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(R_n)_{n \geq 1}$
2. En déduire que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_n)_{n \geq 1}$ convergent et ont même limite.

Informatique

1. Ecrire une fonction **factorielle** qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de $n!$
2. Ecrire deux fonctions **S** et **R** qui prennent en argument un entier n et retourne respectivement la valeur de S_n et R_n .
3. Ecrire une fonction **limite** qui prend en argument un réel positif ϵ et retourne la valeur de S_n pour laquelle $|S_n - R_n| \leq \epsilon$ (la première valeur pour laquelle cette condition est satisfaite).

Calcul de la limite Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x)e^{-x}$$

On rappelle que par convention $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$, et $0! = 1$

1. Exprimer $g_1(x)$ sans le signe somme.
2. Calculer $g_n(0)$ et exprimer $g_n(1)$ à l'aide de S_n .
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $g'_n(x) = \frac{-x^n e^{-x}}{n!}$
5. (a) Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!} dx$
 (b) A l'aide d'un encadrement de $g'_n(x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^{-1} - 1}{n!} \leq \int_0^1 g'_n(x) dx \leq 0$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{e^{-1} - 1}{n!} \leq S_n e^{-1} - 1 \leq 0$$

7. En déduire la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.