Correction TD 12 : Matrices

. 1 Calculs : opérations élémentaires sur les matrices

Correction 1.

1. On obtient :

- $A+B$ impossible : A et B pas de même taille.
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- A^2 impossible : A n'est pas carrée.
- AC impossible : $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- ${}^tB{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $CA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.
- $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(C-2I_3)^3 = 0_{33}$.
- XB impossible : $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$.
- ${}^tBX$ impossible : ${}^tB \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.

2. Il s'agit de l'écriture matricielle d'un système linéaire. Le produit matriciel CX vaut $CX = \begin{pmatrix} 2x-y \\ 2y \\ -x+2z \end{pmatrix}$.

$CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est équivalent à résoudre le système linéaire : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & 2y & & & = & 2 \\ -x & + & & & 2z & = & 3 \end{array}\right.$.

La résolution par la pivot de Gauss donne : $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Correction 2.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & & & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \ddots & & & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

. 2 Puissances n-ième de matrice carrée

Correction 3. Méthode du binôme de Newton.

1. On obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$ et ainsi : $\forall n \geq 3,\ B^n = 0_3$. La matrice B est nilpotente.
2. B n'est pas inversible. En effet, supposons par l'absurde que B est inversible. B^{-1} existe donc et on peut multiplier de chaque côté à gauche de l'égalité $B^3 = 0_3$ par B^{-1}. On obtient alors en utilisant que $BB^{-1} = I_3$ que : $B^2 = 0_3$. Absurde car $B^2 \neq 0_3$. Contradiction. Donc $\boxed{\text{la matrice } B \text{ n'est pas inversible.}}$
3. On remarque que : $C = 2I_3 + B$. Comme la matrice I_3 commute avec toutes les matrices carrées de taille 3, on a : $BI_3 = B = I_3B$ et on peut donc appliquer le binôme de Newton. Soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient donc

$$C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k.$$

On utilise alors le fait que la matrice B est nilpotente et on obtient pour $n \geq 3$:

$$C^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + 2^{n-1} nB + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2}n(n+5) \\ 0 & 2^n & 2^n n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}.$$

Correction 4. Par la méthode de récurrence et la méthode où l'on connaît une relation entre les puissances.

1. Le calcul donne : $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. En cherchant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aN + bI_3 = N^2$, c'est-à-dire, en calculant $aN + bI_3$ et en identifiant les coefficients avec N^2, on obtient : $\boxed{N^2 = -2N + 3I_3}$.
Comme on connaît une relation entre les puissances de N, on sait tout de suite si N est inversible ou pas. Ici, on a : $N\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right) = I_3$ et $\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right) N = I_3$. Ainsi, N est inversible et son inverse est :

$$\boxed{N^{-1} = \frac{1}{3}(N + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

2. C'est la méthode classique pour calculer les puissances n-ièmes d'une matrice.
   - Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $N^n = u_n N + v_n I_3$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
   D'un côté, on a : $N^0 = I_3$ et de l'autre côté, on a : $u_0 N + v_0 I_3$. Il suffit de prendre : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a : $N^{n+1} = N \times N^n$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe deux nombres u_n et v_n tels que : $N^n = u_n N + v_n I_3$. On obtient donc :
$$N^{n+1} = N(u_n N + v_n I_3) = u_n N^2 + v_n N.$$
Il suffit alors d'utiliser : $N^2 = -2N + 3I_3$ et on obtiexnt
$$N^{n+1} = (-2u_n + v_n)N + 3u_n I_3.$$
En posant $u_{n+1} = -2u_n + v_n \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = 3u_n \in \mathbb{R}$, on a bien l'existence de $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ et de $v_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que : $N^{n+1} = u_{n+1}N + v_{n+1}I_3$.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^{n+1} = u_n N + v_n I_3$.

Cette démonstration par récurrence nous donne aussi la relation de récurrence vérifiée par les deux suites. On a en effet
$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } & v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ & v_{n+1} = 3u_n. \end{cases}$$

3. Différentes méthodes peuvent être utilisées là. La méthode classique est de se ramener à une suite récurrente linéaire d'ordre deux pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, on ax
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$
De plus, on peut calculer les deux conditions initiales et on a : $u_0 = 1$ et $u_1 = -2u_0 + v_0 = -2$.
L'équation caractéristique est alors : $r^2 + 2r - 3 = 0$, le discriminant est $\Delta = 16$ et les solutions sont : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(-3)^n + \beta$. On calcule α et β grâce aux conditions initiales et on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}}.$$
En utilisant alors le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = 3u_{n-1}$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \boxed{v_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}}$. On vérifie de plus que la relation est toujours vraie pour $n = 0$.
On peut alors calculer les puissances n-ièmes de N en utilisant $N^n = u_n N + v_n I_3$:
$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}\right) N + \left(\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}\right) I_3 \\ &= \frac{1}{4}(1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 - (-3)^n & 2(-3)^n - 2 & 1 - (-3)^n \\ 2 - 2(-3)^n & 4(-3)^n & 2 - 2(-3)^n \\ (-3)^n - 1 & 2 - 2(-3)^n & 3 + (-3)^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, et on écrit la relation de récurrence sous forme matricielle : $X_{n+1} = NX_n$. On conjecture alors $X_n = N^n X_0$, et on démontre par récurrence cette relation (à faire). On obtient alors :
$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (-3)^n \\ 2 + 2(-3)^n \\ 1 - (-3)^n \end{pmatrix}}.$$

Correction 5. Méthode du binôme de Newton et application à l'étude de suites récurrentes.

1. On calcule $\alpha I_3+\beta J = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$. En identifiant alors les coefficients, on obtient : $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta=1 \end{cases}$ et ainsi, $\alpha=-1$ et $\beta=1$. On vérifie ensuite que l'on a bien : $\boxed{A=J-I_3}$.
   J est une matrice dont les coefficients sont tous les mêmes, on calcule alors J^2, J^3 et on conjecture alors ce que vaut J^n pour tout $n\in\mathbb{N}$, conjecture que l'on démontrera ensuite par récurrence. Un calcul donne : $J^2=3J$ puis $J^3=3^2J$. On peut donc conjecturer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ J^n=3^{n-1}J$.
   - On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $\quad J^n=3^{n-1}J$.
   - Initialisation : pour $n=1$:
     D'un côté, on a : $J^1=J$ et de l'autre côté, on a : $3^0J=J$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a en utilisant l'hypothèse de récurrence : $J^{n+1}=J^n\times J=3^{n-1}J^2=3^{n-1}\times 3J=3^nJ$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad J^n=3^{n-1}J}$.
2. Comme les matrices J et $-I_3$ commutent car I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   $$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(-I_3)^{n-k}=(-1)^nI_3+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J(-1)^{n-k}=(-1)^nI_3+J\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}(-1)^{n-k}\right).$$
   En utilisant alors le binôme de Newton avec les nombres réels, on obtient
   $$A^n=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}J\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k}(-1)^{n-k}\right)=(-1)^nI_3+\frac{1}{3}J\left(2^n-(-1)^n\right)$$
   Soit finalement : $\boxed{A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) & \frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) & \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) & \frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right) \end{pmatrix}}$.
3. On note alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ le vecteur colonne $X_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. La relation de récurrence devient alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $X_{n+1}=AX_n$.
   - Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $X_n=A^nX_0$.
   - Initialisation : pour $n=0$:
     D'un côté, on a : X_0 et de l'autre côté, on a : $A^0X_0=I_3X_0=X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par définition de la suite, on a : $X_{n+1}=AX_n$. Puis par hypothèse de récurrence, on sait que : $X_n=A^nX_0$. Ainsi, on obtient bien que : $X_{n+1}=A^{n+1}X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad X_n=A^nX_0}$.

   En utilisant alors l'expression de A^n trouvée précédemment, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   $$X_n=A^nX_0\Leftrightarrow\begin{cases} x_n &=& \frac{1}{3}\left((-1)^n+2^{n+1}\right) \\ y_n &=& \frac{1}{3}\left((-1)^n+2^{n+1}\right) \\ z_n &=& \frac{2}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right). \end{cases}$$

Correction 6. Par la méthode de récurrence.

1. Il s'agit là encore de démontrer l'existence de deux suites.
   - Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
   $$\mathcal{P}(n):\ \text{il existe deux nombres réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$
   - Initialisation : pour $n = 0$:
   D'un côté, on a : $A^0 = I_3$. Les deux nombres $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait donc qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que
   $$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$
   De plus, un calcul donne
   $$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, il suffit de poser : $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n. \end{pmatrix}$.

   On a de plus : $\begin{cases} a_0 = 1 \text{ et } \quad b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ \qquad\qquad\quad b_{n+1} = -a_n. \end{cases}$

2. En utilisant la relation de récurrence des deux suites, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. L'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$, le discriminant est $\Delta = 9$ et les solutions sont donc : -1 et 2. On obtient ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$
   On trouve avec les conditions initiales que $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$. Ainsi, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n}.$$
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = -a_{n-1}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \boxed{b_n = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n}$. On vérifie que cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. On obtient ainsi l'expression des puissances n-ièmes de A (à faire).

Correction 7. Par la méthode de diagonalisation.

1. (a) On a $P^{-1}AP = D \Rightarrow PP^{-1}AP = PD \Rightarrow AP = PD \Rightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$.
   (b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : A^n = PD^nP^{-1}$.
      - Initialisation : pour $n = 0$:
      D'un côté, on a : $A^0 = I_r$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_r$. Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A^n \times A & \\ & = & PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} & \text{d'après } P(n) \\ & = & PD^nDP^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1} & \end{array}$$

  donc $p(n+1)$ est vraie.

  Par principe de récurrence, on a, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}}$.
  Comme D est diagonale, il est ainsi facile de calculer les puissances n-ièmes de A.

(c) Si D est inversible, alors $A = PDP^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles. De plus, on a $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Ainsi, comme D est diagonale, il est facile de calculer l'inverse de A.
Si D n'est pas inversible, alors A non plus, car sinon on aurait $D = P^{-1}AP$ qui serait inversible comme produit de matrices inversibles.
On a donc bien A inversible si et seulement si D inversible.

2. Application :

(a) On a $\det(M) = 3 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $P^{-1}MP$ et on vérifie qu'elle est bien diagonale. Le calcul donne : $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Ainsi M est bien diagonalisable et on note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On a : $M = PDP^{-1}$.

(c) On sait de plus tout de suite que M est inversible car D est inversible car elle est diagonale et qu'elle n'a aucun 0 sur sa diagonale. De plus, on sait alors que : $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$. Or D est diagonale donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.
Ainsi, on obtient pour les puissances n-ièmes de M :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} \frac{2+(-2)^n}{3} & \frac{1-(-2)^n}{3} \\ \frac{2(1-(-2)^n)}{3} & \frac{1+2(-2)^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Correction 8.

1. Comme $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, $(A-\lambda I_3)X = 0_{31}$ est l'écriture matricielle du système suivant :
$\begin{cases} (1-\lambda)x & & - & z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ -x & + \ 2y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$. On résout alors ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss et on obtient :

   - Si $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$, on a : $\mathcal{S}_\lambda = \{(0,0,0)\}$.

- Si $\lambda=0$, on a $\mathcal{S}_0=\{(x,0,x),\ x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1),\ x\in\mathbb{R}\}$.
- Si $\lambda=1$, on a $\mathcal{S}_1=\{(2y,y,0),\ y\in\mathbb{R}\}=\{y(2,1,0),\ y\in\mathbb{R}\}$.
- Si $\lambda=2$, on a $\mathcal{S}_2=\{(x,0,-x),\ x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1),\ x\in\mathbb{R}\}$.

Vous verrez l'année prochaine que ceci permet de déterminer la matrice P permettant de diagonaliser la matrice A. En effet, la matrice P a été construite en prenant les vecteurs directeurs de chaque ensemble de solutions dans les cas particuliers $\lambda=0, \lambda=1$ et $\lambda=2$.

2. Pour étudier l'inversibilité de P et calculer son inverse, on utilise la méthode du pivot de Gauss. Après calculs, on obtient que P est bien inversible et que $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Le calcul matriciel donne alors : $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. On note D cette matrice diagonale.
3.
   - On a : $P^{-1}AP=D\Leftrightarrow AP=PD\Leftrightarrow A=PDP^{-1}$.
   - De plus, on montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $A^n=PD^nP^{-1}$: à savoir faire.
   - D étant une matrice diagonale, on connaît toutes ses puissances n-ièmes. Ainsi, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $D^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$. On fait alors le calcul PD^nP^{-1} et on obtient ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, que $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2-2^n & -2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ -2^{n-1} & 2^n & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.
4. Étude de l'inversibilité de A : montrons par l'absurde que A n'est pas inversible. Supposons que A est inversible. Alors, comme $D=P^{-1}AP$ et comme P et P^{-1} sont inversibles, on aurait D inversible. Or comme D est une matrice diagonale avec un 0 sur sa diagonale, on sait que D n'est pas inversible. Donc par l'absurde, on a montré que $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.
5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose le vecteur colonne $U_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a d'après la définition des trois suites : $U_{n+1}=AU_n$.
   On conjecture que : $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=A^nU_0$. Ceci est absolument à démontrer par récurrence.
   Puis, en utilisant alors que $U_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{\begin{cases}u_n &= 2-2^n\\ v_n &= 1\\ w_n &= 2^n.\end{cases}}$

Correction 9.

1. **Résoudre, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, le système : $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I_3})\mathbf{X}=\mathbf{0_{31}}$ avec $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:**

   En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient que le système est équivalent au système échelonné suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & & & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (\lambda-1)^2(\lambda+3)z & = & 0 \end{array}\right.$$

On va donc devoir diviser par $(\lambda-1)^2(\lambda+3)$ et il faut donc étudier des cas selon la valeur de λ.

- Cas 1 : si $\lambda \notin \{-3,1\}$:
  Le système est alors un système de rang 3, c'est donc un système de Cramer et il admet une unique solution qui est $\boxed{\mathcal{S}_{\lambda\notin\{-3,1\}} = \emptyset.}$
- Cas 2 : si $\lambda = -3$:
  Le système est alors équivalent au système échelonné suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$
  C'est un système de rang 2 dont les deux inconnues principales sont x et y et l'inconnue secondaire est z. On obtient que $\boxed{\mathcal{S}_{\lambda=-3} = \{(9z,-3z,z),\ z\in\mathbb{R}\}.}$
- Cas 3 : si $\lambda = 1$:
  Le système est alors équivalent au système échelonné suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$
  C'est un système de rang 2 dont les deux inconnues principales sont x et y et l'inconnue secondaire est z. On obtient que $\boxed{\mathcal{S}_{\lambda=1} = \{(z,z,z),\ z\in\mathbb{R}\}.}$

2. **Montrer que P est inversible et caluler $\mathbf{P^{-1}}$. Calculer $\mathbf{P^{-1}AP}$:**
   On utilise la méthode du pivot de Gauss et on obtient que $\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible}}$ et que :
   $$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.}$$
   Le calcul de deux produits matriciels donnent que : $\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$ On note T cette matrice triangulaire supérieure.
3. **En déduire $\mathbf{A^n}$ pour tout $\mathbf{n}\in\mathbb{N}$:**
   - Comme $T = P^{-1}AP$, on a : $\boxed{A = PTP^{-1}}$ car $T = P^{-1}AP \Leftrightarrow PT = AP \Leftrightarrow PTP^{-1} = A$ en utilisant le fait que $PP^{-1} = P^{-1}P = I_3$.
   - Un raisonnement par récurrence facile permet de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{A^n = PT^nP^{-1}.}$
   - Il reste donc à calculer T^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme c'est une matrice triangulaire supérieure on va pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton.
     $\star$ On a : $T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B + C$ avec B la matrice diagonale et C la matrice nilpotente.

$\star$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $B^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus on a : $C^2 = 0_3$ et ainsi pour tout $k \geq 2$: $C^k = 0_3$.

$\star$ Vérifions que les matrices B et C commutent bien entre elles. On a : $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $BC = CB$ et les matrices sont bien commutatives.

$\star$ On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton et on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
T^n &= (B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} C^0 B^n + \binom{n}{1} C^1 B^{n-1} \qquad \text{car } C \text{ est nilpotente} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

- On peut ainsi calculer $A^n = PT^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant deux produits matriciels, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{A^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4n+7+9(-3)^n & -18(-3)^n+8n+18 & 9(-3)^n-12n-9 \\ (-3)^{n+1}+4n+3 & -2(-3)^{n+1}+8n+10 & (-3)^{n+1}-12n+3 \\ (-3)^n+4n-1 & -2(-3)^n+8n+2 & (-3)^n-12n+15 \end{pmatrix}}$.

4. **La matrice A est-elle inversible ?**
On sait que $A = PTP^{-1}$ et T est une matrice inversible comme matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale. Comme P et P^{-1} sont aussi des matrices inversibles, on a que $\boxed{A \text{ est inversible}}$ comme produits de matrices inversibles et $A^{-1} = PT^{-1}P^{-1}$. On connaît déjà P et P^{-1}. On calcule T^{-1} par le pivot de Gauss puis on fait deux produits matriciels. Ou alors on calcule directement par le pivot de Gauss A^{-1}. Dans les deux cas on trouve que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}$.

5. **On considère une suite définie par $\mathbf{u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n}$.**

   (a) **On pose pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$: $\mathbf{X_n} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Donner la relation qui lie $\mathbf{X_{n+1}}$, $\mathbf{X_n}$ et $\mathbf{A}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$:**
   Le calcul donne que : $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la définition de la suite.

   (b) **En déduire que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$: $\mathbf{X_n = A^n X_0}$:**
   Il s'agit ici de faire une récurrence. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $X_n = A^n X_0$.

   - Initialisation : pour $n = 0$:
     D'un côté, on a : X_0 et de l'autre côté, on a : $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par définition de la suite, on a : $X_{n+1} = AX_n$. Puis par hypothèse de récurrence, on sait que : $X_n = A^n X_0$. Ainsi, on obtient bien que : $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad X_n = A^n X_0.}$

   (c) **En déduire l'expression explicite de la suite $\mathbf{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$:**
   En utilisant les conditions initiales, on sait que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En calculant $A^n X_0$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 9(-3)^n + 4n + 7 \\ u_{n+1} & = & (-3)^{n+1} + 4n + 3 \\ u_n & = & \boxed{(-3)^n + 4n - 1.} \end{array}$$

   On remarque de plus que l'on retrouve bien u_{n+1} et u_{n+2} à partir de l'expression de u_n en remplaçant tous les n par des $n+1$ ou des $n+2$.

. 3 Inversibilité de matrice carrée

Correction 10. Etude de l'inversibilité par le pivot de Gauss.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ A n'est pas inversible car elle est triangulaire supérieure avec un 0 sur la diagonale.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$.
6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2}\\ 0 & \dfrac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Correction 11. On arrive à mettre le système sous forme échelonné. Par exemple, en commençant par inverser la première et la dernière ligne et en faisant la méthode usuelle du pivot de Gauss pour trouver l'inverse, on arrive à

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a+2 & 1 & -1 & -1\end{array}\right).$$

Mis sous cette forme, on peut tout de suite savoir si la matrice est inversible ou pas. En effet, on sait qu'une matrice de taille 3 est inversible si et seulement si elle est de rang 3. Or le rang d'une matrice est égale au rang de tout système linéaire qui lui est associé. Ici, le système linéaire associé est triangulaire et il est de rang 3 si et seulement si les trois éléments de sa diagonale sont non nuls. Ainsi, on obtient

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow a+2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -2.$$

Dans ce cas, on obtient en se ramenant à l'identité à gauche la matrice

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{a+2} & \dfrac{4-a}{-3(a+2)} & \dfrac{a+8}{-3(a+2)}\\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{a+2} & -\dfrac{1}{a+2} & -\dfrac{1}{a+2}\end{pmatrix}.$$

Correction 12. Système linéaire et matrice.

1. Le système linéaire s'écrit sous la forme matricielle suivante : $AX=Y$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

2. On calcule l'inverse de A par la méthode du pivot de Gauss. On obtient

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

3. On sait, lorsque la matrice associée au système est inversible que le système est de Cramer et que l'unique solution est alors donnée par

$$X=A^{-1}Y.$$

On calcule donc $A^{-1}Y$ et cela nous donnera la solution du système. On obtient

$$\mathcal{S}=\{(1,1,1)\}.$$

Correction 13. **Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}$:**

Pour calculer le rang de A, on utilise la méthode du pivot de Gauss et on obtient que :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 4-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -\lambda-8 \\ 0 & 24-7\lambda & \lambda^2+\lambda-16 \end{pmatrix}.$$

Afin de pouvoir continuer le pivot de Gauss, on doit supposer $\lambda \neq 12$ afin d'avoir un pivot non nul. On suppose donc que $\lambda \neq 12$ et on obtient que

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -\lambda-8 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.$$

On doit donc distinguer des cas selon la valeur de λ.

- Cas 1 : $\boxed{\text{si } \lambda \notin \{0,2,12\} \text{ alors } \mathrm{rg}(A) = 3.}$ En particulier A est donc inversible.
- Cas 2 : $\boxed{\text{si } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ alors } \mathrm{rg}(A) = 2.}$ En particulier A est non inversible.
- Cas 3 : $\boxed{\text{si } \lambda = 12 :}$ on doit reprendre les calculs juste avant avoir fait cette hypothèse et on obtient que :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 144 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} = \boxed{2.}$$

En particulier A est non inversible.

Correction 14. Méthode lorsque l'on connaît une relation entre les puissances.

1. Un calcul donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque alors que : $A^2 = A+2I_3$. Si on ne le voit pas directement, on écrit $aA+bI_3$, on calcule cette matrice puis on identifie les coefficients avec A^2.
2. On connaît une relation entre les puissances de A, on sait donc tout de suite si A est inversible ou pas. Ici, on a
$$A\left(\frac{1}{2}(A-I_3)\right) = I_3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{2}(A-I_3)\right)A = I_3.$$
Ainsi A est inversible d'inverse : $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-I_3) = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

Correction 15.

1. On a : $M(M^3-4M+I_3) = 5I_3 \Leftrightarrow M \times \left[\frac{1}{5}(M^3-4M+I_3)\right] = I_3$ et de même : $\left[\frac{1}{5}(M^3-4M+I_3)\right] \times M = I_3$. Ainsi on a trouvé une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \times C = I_3$. Donc par définition d'une matrice inversible, on sait que M est inversible et que $\boxed{M^{-1} = C = \frac{1}{5}(M^3-4M+I_3)}$.
2. On a : $A(A^4-I_3) = 0_3$. Par l'absurde, si A est inversible, alors A^{-1} existe et on peut donc multiplier à gauche par A^{-1} l'égalité $A(A^4-I_3) = 0_3$. Comme $A^{-1} \times A = I_3$ et $A^{-1} \times 0_3 = 0_3$, on obtient : $A^4 - I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A^4 = I_3$. Absurde car par hypothèse, on sait que : $A^4 \neq I_3$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$.

Correction 16. Méthode lorsque l'on connaît une relation entre les puissances.

1. On a : $A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. D'où, on a : $(A-I_3)^2 = 0_3$.
   Comme la matrice I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on a : $AI_3 = I_3A = A$ et on peut appliquer les identités remarquables. On obtient
$$(A-I_3)^2 = 0_3 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I_3^2 = 0_3 \Leftrightarrow A^2 - 2A = -I_3 \Leftrightarrow A(2I_3 - A) = I_3.$$
   Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = 2I_3 - A$.
2. Comme on connaît une relation entre les puissances de A, on peut penser à la méthode par récurrence. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\exists a_n \in \mathbb{R},\ \exists b_n \in \mathbb{R},\ A^n = a_nA + b_nI_3$.
   - Initialisation : pour $n = 0$:
     On prend $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ qui conviennent. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Comme $A^{n+1} = A \times A^n$, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation sur les petites puissances, on obtient
$$A^{n+1} = A(a_nA + b_nI_3) \Rightarrow A^{n+1} = (2a_n + b_n)A - a_nI_3.$$
     On pose alors $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_nA + b_nI_3.}$

   Les deux relations de récurrence permettent d'obtenir :
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n. \end{cases}$$
   Cette suite vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$, le discriminant est $\Delta = 0$ et la solution est 1. Ainsi, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha + n\beta.$$
   On obtient avec les conditions initiales
$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = 1.$$
   Ainsi, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = n.$$
   On en déduit alors facilement b_n en fonction de n puis les puissances n-ièmes de A (à faire).
   Soit alors $n \in \mathbb{Z},\ n \notin \mathbb{N}$. On a : $A^n = (A^{-1})^{-n}$ avec $-n \in \mathbb{N}$. De plus, on sait que $A^{-1} = 2I_3 - A$. On obtient alors avec le binôme de Newton comme A et I_3 commutent et que $(-n) \in \mathbb{N}$:
$$A^n = (2I_3 - A)^{-n} = \sum_{k=0}^{-n} \binom{-n}{k} (-A)^k (2I_3)^{-n-k} = \sum_{k=0}^{-n} \binom{-n}{k} (-1)^k 2^{-n-k} A^k.$$
   Comme on connaît déjà les puissances de A pour $k \in \mathbb{N}$, on trouve bien l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

Correction 17. Par la définition.

1. On obtient
$${}^tMM = \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4.$$

2. Comme les a, b, c, d sont non tous nuls, on a $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$. On en déduit $\frac{{}^tM}{a^2+b^2+c^2+d^2}M = I_4$ et de même $M\frac{{}^tM}{a^2+b^2+c^2+d^2} = I_4$. Donc M est inversible, et $M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}{}^tM$.

Correction 18. Inversibilité des matrices carrées d'ordre deux.

1. On calcule $(a+d)M-(ad-bc)I_2$ d'un côté et M^2 de l'autre et on obtient bien le résultat voulu.
2. On fait deux cas selon la valeur de Δ.
   - On suppose que $\Delta \neq 0$. On a alors : $M^2-(a+d)M = -(ad-bc)I_2$, à savoir, comme $\Delta \neq 0$:
   $$M((a+d)I_2-M) = (ad-bc)I_2 \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2-M)\right) = I_2.$$
   Ainsi M est bien inversible et son inverse est : $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2-M) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   - On suppose que $\Delta = 0$. Montrons par l'absurde que M n'est pas inversible. On suppose que M est inversible. On a alors : $M^2 = (a+d)M$, à savoir : $M(M-(a+d)I_2) = 0_2$. Mais comme par hypothèse M est inversible, on peut multiplier à gauche de chaque côté par M^{-1}. On obtient alors : $M-(a+d)I_2 = 0_2$. On obtient alors en calculant coefficient par coefficient $a=b=c=d=0$, contradiction, car la matrice nulle n'est pas inversible. On en déduit donc que si $\Delta = 0$, alors M n'est pas inversible.

   On a donc bien démontré que : M inversible si et seulement si $\Delta \neq 0$. De plus, on a vu que si M est inversible, alors on a : $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Correction 19. Inversibilité des matrices de rotation.

1. On prend donc deux éléments quelconques de $\mathcal{R}$. Soit donc M_θ et M_α éléments de $\mathcal{R}$ avec $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$M_\theta M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha & -(\cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta) \\ \cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta & \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = M_{\theta+\alpha}.$$
2. Soit $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on calcule le produit $M_\theta M_\alpha$ et $M_\alpha M_\theta$. D'après le calcul fait précédemment et en utilisant le fait que $\alpha + \theta = \theta + \alpha$, on a
$$M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta.$$
3. Il suffit de prendre $\theta = 0$ et on obtient bien que : $I_2 = M_0 \in \mathcal{R}$.
4. Soit un élément M_θ de $\mathcal{R}$. On cherche s'il existe une matrice M telle que $M_\theta M = I_2 = MM_\theta$. Or on sait que $I_2 = M_0$ et que : $M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta$. On voit ainsi que pour que $M_{\theta+\alpha}$ soit égal à I_2, il suffit de prendre $\alpha = -\theta$. On obtient ainsi que M_θ est bien inversible et que $(M_\theta)^{-1} = M_{-\theta}$. Cet inverse est donc bien dans $\mathcal{R}$.

. 4 Divers

Correction 20. **Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on appelle trace de A le nombre $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.**

1. **Calculer la trace de la matrice nulle, de la matrice identité et de la matrice M.**

   On a $Tr(0_n) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$, $Tr(I_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ et $Tr(M) = 1+2+1 = 4$.

2. **Vérifier que** $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(\lambda A+\mu B)=\lambda Tr(A)+\mu Tr(B)$**.**
   Par définition, on a :
$$\begin{aligned} Tr(\lambda A+\mu B) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,i}+\mu b_{i,i}) \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}+\mu\sum_{i=1}^{n}b_{i,i} \\ &= \lambda Tr(A)+\mu Tr(B). \end{aligned}$$
   On a donc bien $\boxed{Tr(\lambda A+\mu B)=\lambda Tr(A)+\mu Tr(B)}$: la trace est linéaire.
3. **Montrer que** $\forall(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ Tr(AB)=Tr(BA)$**.**
   On applique à nouveau la définition :
$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}\right) \qquad \text{en échangeant l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(BA)_{k,k} \ = \ Tr(BA). \end{aligned}$$
   Ainsi on a bien $\boxed{Tr(AB)=Tr(BA)}$.
4. **Les matrices** A **et** B **sont dites semblables s'il existe une matrice** P **inversible telle que** $B=P^{-1}AP$**. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.**
   On applique la propriété démontrée à la question précédente :
$$Tr(B)=Tr(P^{-1}A\times P)=Tr(P\times P^{-1}A)=Tr(A).$$
   Ainsi $\boxed{\text{deux matrices semblales ont la même trace}}$.

Correction 21. On fait un raisonnement type analyse-synthèse. On suppose donc que la matrice $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire que A commute avec toutes les matrices carrées de taille n.

1. D'après notre hypothèse sur A, A commute en particulier avec toutes les matrices diagonales. Ainsi, si $D=\text{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, on a : $AD=DA$. Calculons alors AD et DA. On obtient
$$AD=\begin{pmatrix} \lambda_1a_{11} & \lambda_2a_{12} & \dots & \lambda_na_{1n} \\ \lambda_1a_{21} & \lambda_2a_{22} & \dots & \lambda_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1a_{n1} & \lambda_2a_{n2} & \dots & \lambda_na_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } DA=\begin{pmatrix} \lambda_1a_{11} & \lambda_1a_{12} & \dots & \lambda_1a_{1n} \\ \lambda_2a_{21} & \lambda_2a_{22} & \dots & \lambda_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_na_{n1} & \lambda_na_{n2} & \dots & \lambda_na_{nn} \end{pmatrix}.$$
   Comme A commute avec toutes les matrices diagonales, on peut supposer ici que la matrice D est telle que tous les λ_i sont tous différents. Comme $DA=AD$, on remarque que l'on doit avoir pour les coefficients hors de la diagonale la relation suivante
$$\lambda_ia_{ij}=\lambda_ja_{ij}\Leftrightarrow a_{ij}\,(\lambda_i-\lambda_j)=0.$$

Si vous ne voyez pas pourquoi, prenez des exemples, regardez ce qui se passe pour la première ligne deuxième colonne.... Comme $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ si on n'est pas sur la diagonale, c'est-à dire si $i \neq j$, on a

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Ainsi, on vient de vérifier que la matrice A est forcément diagonale.

2. D'après ce qui précède, on sait que A est de type : $A = \text{Diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Comme par hypothèse, la matrice A commute avec toutes les matrices de taille n, on a : $AM = MA$. En refaisant le même type de calcul que dans la question précédente, on a

$$MA = \begin{pmatrix} \beta_1 m_{11} & \beta_2 m_{12} & \dots & \beta_n m_{1n} \\ \beta_1 m_{21} & \beta_2 m_{22} & \dots & \beta_n m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1 m_{n1} & \beta_2 m_{n2} & \dots & \beta_n m_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } AM = \begin{pmatrix} \beta_1 m_{11} & \beta_1 m_{12} & \dots & \beta_1 m_{1n} \\ \beta_2 m_{21} & \beta_2 m_{22} & \dots & \beta_2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n m_{n1} & \beta_n m_{n2} & \dots & \beta_n m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mais cette fois-ci les coefficients de M peuvent être pris quelconques et en particulier on peut supposer qu'ils sont tous non nuls car A commute avec toutes les matrices de taille n. Ainsi, on doit avoir

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \beta_i m_{ij} = \beta_j m_{ij} \Leftrightarrow m_{ij} (\beta_i - \beta_j) = 0.$$

Comme on peut supposer que tous les m_{ij} sont non nuls, on a

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \beta_i = \beta_j.$$

Ainsi, la matrice A est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux. Ainsi, la matrice A est de type

$$A = \lambda I_n, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. L'analyse a montré que si A appartient au commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si A commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n, alors A est forcément de type : $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, il est très facile de montrer que les matrices de type λI_n commutent bien avec toutes les matrices car on sait que I_n commute bien avec toutes les matrices carrées de taille n. Ainsi, on vient de prouver par double inclusion que le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des matrices de type λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 22. Résolution d'équation matricielle.

On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que M vérifie $M^2 = 0_2$. On obtient alors : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, en identifiant les coefficients, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a^2 + bc &= 0 \\ b(a+d) &= 0 \\ c(a+d) &= 0 \\ d^2 + bc &= 0. \end{cases}$$

On peut distinguer trois cas :

- Soit $c = 0$ et le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} a = d = c = 0 \\ b = b. \end{cases}$$

Donc $\boxed{S_{c=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}}$.

- Soit $b=0$ et le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} a=d=b=0 \\ c=c. \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{S_{b=0}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, c\in\mathbb{R}\right\}}$.

- Si $b\neq 0$ et $c\neq 0$, alors $a+d=0 \Leftrightarrow a=-d$ et le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} a=-d \\ a^2=-bc \end{array}\right.$$

On remarque que si b et c sont de même signe, c'est-à dire si $bc>0$, on il n'y a pas de solution : $\boxed{S_{bc>0}=\emptyset}$.
Si $bc<0$, on obtient $a=\pm\sqrt{-bc}$. Et donc :

$$\boxed{S_{bc<0}=\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & -\sqrt{-bc} \end{pmatrix}, (b,c)\in\mathbb{R}^2\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} -\sqrt{-bc} & b \\ c & \sqrt{-bc} \end{pmatrix}, (b,c)\in\mathbb{R}^2\right\}}$$

.

. 5 Exercices récapitulatifs

Correction 23.

1. (a) Comme $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$, $(A-\lambda I_3)X=0_{31}$ est l'écriture matricielle du système suivant : $\left\{\begin{array}{lllllll} (3-\lambda)x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & & & = & 0 \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$. On résout alors ce système en utilisant la méthode du pivot de Gauss et on obtient :
   - Si $\lambda\notin\{1,2\}$, on a : $\mathcal{S}_\lambda=\{(0,0,0)\}$.
   - Si $\lambda=1$, on a $\mathcal{S}_1=\{(x,0,x),\ x\in\mathbb{R}\}$.
   - Si $\lambda=2$, on a $\mathcal{S}_2=\left\{(2z-y,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

   (b) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient que P est inversible et que $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Le calcul matriciel donne : $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. De plus, : $P^{-1}AP=D \Leftrightarrow AP=PD \Leftrightarrow \boxed{A=PDP^{-1}}$.

(d) On montre alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$. Et, comme D est une matrice diagonale, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Le calcul matriciel donne alors : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 2-2^{n+1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}}$.

(e) Comme D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls, D est inversible. Or on a : $A = PDP^{-1}$ et P et P^{-1} sont inversibles, donc A est elle aussi inversible comme produit de matrices inversibles. De plus, d'après la propriété sur le produit de matrices inversibles, on obtient que : $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. De plus, on sait que : $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ainsi le calcul donne $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$.

2. (a) On obtient que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On commence par calculer B^2 et on obtient que : $B^2 = -B$ puis : $B^3 = B^2B = -BB = -B^2 = B$. Ainsi en itérant, on peut conjecturer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $B^n = (-1)^{n-1}B$. Vous devez alors me démontrer une telle propriété par récurrence. ATTENTION : cette formule n'est vraie qu'à partir de $n = 1$.

(b) La matrice A s'écrit donc comme la somme de deux matrices B et $2I_3$ dont on connaît les puissances car $A = B + 2I_3$. De plus comme I_3 et donc aussi $2I_3$ commutent avec toutes les matrices carrées de même taille, on a bien que : B et $2I_3$ commutent. Ainsi d'après la formule du binôme de Newton, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k && \text{on met à part le terme } k=0 \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k-1} B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k} \right) B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^{k} - (2^n) \right) B && \text{on ajoute le terme 0} \\
&= 2^n I_3 - \left(1^n - (2^n)\right) B \;=\; 2^n I_3 + (2^n - 1)\, B.
\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 2-2^{n+1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}}$.

3. (a) On calcule $A^2 - 3A + 2I_3$ et on vérifie que l'on tombe bien sur la matrice nulle.

   (b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   - Initialisation : pour $n = 0$. Comme $A^0 = I_3$, si on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on obtient bien que : $a_0 A + b_0 I_3 = A^0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a :

   $$\begin{aligned}
   A^{n+1} &= A^n \times A \\
   &= (a_n A + b_n I_3) A && \text{par hypothèse de récurrence} \\
   &= a_n A^2 + b_n A \\
   &= a_n (3A - 2I_3) + b_n A \;=\; (3a_n + b_n) A - 2a_n I_3
   \end{aligned}$$

   On pose donc $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$ et ainsi il existe bien deux réels tels que : $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_3$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n tels que : $\boxed{A^n = a_n A + b_n I_3}$.

   (c) Les suites sont définies par les relations de récurrence suivantes : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ \qquad\qquad\;\; b_{n+1} = -2a_n. \end{cases}$

   Ainsi on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n$. On reconnnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux et on connaît de plus les deux conditions initiales car $a_0 = 0$ et $a_1 = 3a_0 + b_0 = 1$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3r + 2 = 0$. Le discriminant vaut 1 et les deux racines réelles sont 1 et 2. Ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \alpha + \beta 2^n$.

On calcule les constantes grâce aux conditions initiales et on obtient : $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = -1 + 2^n$.
Puis, comme $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = -2a_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = -2a_{n-1}$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = -2(-1 + 2^{n-1}) = 2 - 2^n$. On vérifie que cette formule est vraie aussi pour $n = 0$. On a donc obtenu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$. Là encore, on retrouve bien que

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}}$$

.

(d) On connaît une relation entre les puissances de A. En effet, on sait que : $A^2 = 3A - 2I_3 \Leftrightarrow A(A - 3I_3) = -2I_3 \Leftrightarrow A\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right) = I_3$. Ainsi par définition de l'inverse d'une matrice, on sait que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$.

(e) On sait que : $A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n$ et d'après ce qui précède, on sait que : $A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A$. Ainsi, on doit calculer : $A^{-n} = \left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right)^n$. Comme I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on a bien que $\frac{3}{2}I_3$ et $\frac{1}{2}A$ commutent. Ainsi en utilisant alors le binôme de Newton, on en déduit que : $A^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}A\right)^k \left(\frac{3}{2}I_3\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} A^k$. Comme on connaît les puissances de A, on peut en déduire les puissances de A^{-n}. En effet, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $A^k = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_3$. Ainsi en injectant cette relation dans la somme et après calculs, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^{-n} = \frac{5^n - 4^n}{2^n}A + \frac{4^n - 2 \times 5^n}{2^{n-1}}I_3.$$

Correction 24.

1. **Méthode 1 : par diagonalisation**

(a) **Montrons que P est inversible et calculer $\mathbf{P^{-1}}$:**

La méthode du pivot de Gauss donne que $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et que $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) **Calculons $\mathbf{D = P^{-1}AP}$ puis exprimons A en fonction de P, D et $\mathbf{P^{-1}}$:**

Le calcul donne $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$. De plus, comme P est inversible, on a

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow \boxed{A = PDP^{-1}}$$

en utilisant le fait que $PP^{-1} = I_3$.

(c) **Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A^n = PD^nP^{-1}}$ puis calculons $\mathbf{A^n}$:**
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.

- Initialisation : pour $n=0$. D'un côté, on a : $A^0=I_3$ et de l'autre côté, on a : $PD^0P^{-1}=PI_3P^{-1}=PP^{-1}=I_3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a : $A^{n+1}=A\times A^n$. Par hypothèse de récurrence, on a : $A^n=PD^nP^{-1}$ et on sait que : $A=PDP^{-1}$. On obtient ainsi : $A^{n+1}=PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=PD^nP^{-1}.}$

La matrice D étant diagonale, on sait que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & (-4)^n & 0\\ 0 & 0 & (-4)^n\end{pmatrix}.$$

En calculant alors les deux produits, on trouve

$$\boxed{A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+(-4)^n & (-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n\\ 2^n-(-4)^n & 3(-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n\\ 2(2^n-(-4)^n) & 2((-4)^n-2^n) & 2^{n+1}\end{pmatrix}.}$$

(d) **Montrons que A est inversible puis calculons $\mathbf{A^{-1}}$:**
Comme la matrice D est une matrice diagonale et qu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale, on sait tout de suite qu'elle est inversible et que son inverse est $D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. Comme $A=PDP^{-1}$ et que D, P et P^{-1} sont toutes inversibles, alors A est inversible comme produits de matrices toutes inversibles. De plus, par propriété sur le produit de matrices inversibles, on sait que :
$A^{-1}=(P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1}=PD^{-1}P^{-1}$. Le calcul donne

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}.}$$

2. **Méthode 2 : par le binôme de Newton**

(a) **Calculons $\mathbf{B^n}$ en fonction de B avec $\mathbf{B=A_2I_3}$:**
Le calcul de B donne $B=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$. On obtient alors : $B^2=\begin{pmatrix} 18 & 18 & -18\\ -18 & 54 & -18\\ -36 & 36 & 0\end{pmatrix}=-6B$.
Puis en itérant, on trouve : $B^3=6^2B$. On peut conjecturer que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star, B^n=(-6)^{n-1}B$.

- Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$ la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $B^n=(-6)^{n-1}B$.
- Initialisation : pour $n=1$:
D'un côté, on a B et de l'autre côté, on a : $(-6)^0B=B$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a donc : $B^n=(-6)^{n-1}B$. De plus, on a : $B^{n+1}=B\times B^n$, ainsi, on obtient

$$B^{n+1}=B\times(-6)^{n-1}B=(-6)^{n-1}B^2=(-6)^{n-1}(-6)B=(-6)^nB.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ B^n=(-6)^{n-1}B.}$

(b) **Calculons l'expression de $\mathbf{A^n}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ en fonction de n, A et $\mathbf{I_3}$:**
On remarque que : $A = B + 2I_3$. Comme B et $2I_3$ commutent car I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B + 2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k}.$$

En utilisant alors la formule démontrée pour B^k vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on obtient

$$\begin{aligned}
A^n &= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k 2^{n-k} \\
&= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k-1} 2^{n-k} \right) B \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k} 2^{n-k} \right) \frac{B}{6} \\
&= 2^n I_3 - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-6)^{k} 2^{n-k} - 2^n \right) \frac{B}{6} \\
&= 2^n I_3 - ((-4)^n - 2^n) \frac{A - 2I_3}{6} \\
&= \frac{(-4)^n + 2^{n+1}}{3} I_3 + \frac{2^n - (-4)^n}{6} A.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 3(-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2(2^n - (-4)^n) & 2((-4)^n - 2^n) & 2^{n+1} \end{pmatrix}.}$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

(c) **Étude de trois suites récurrentes :**

i. **Montrons que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X_n = A^n X_0}$:**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par les suites, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.}$$

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad X_n = A^n X_0$.
- Initialisation : pour $n = 0$:
D'un côté, on a : X_0 et de l'autre côté, on a : $A^0 X_0 = X_0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. Par définition des suites, on sait que : $X_{n+1} = AX_n$. Or par hypothèse de récurrence, on sait que : $X_n = A^n X_0$. Ainsi, on a

$$X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.}$

ii. **Donnons l'expression explicite de $\mathbf{x_n}$, $\mathbf{y_n}$ et $\mathbf{z_n}$:**
Comme on connaît l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n + (-4)^n)x_0 + ((-4)^n - 2^n)y_0 + (2^n - (-4)^n)z_0\right] \\ y_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n - (-4)^n)x_0 + (3(-4)^n - 2^n)y_0 + (2^n - (-4)^n)z_0\right] \\ z_n &= (2^n - (-4)^n)x_0 + ((-4)^n - 2^n)y_0 + 2^n z_0. \end{aligned}}$$

iii. **Étude de la convergence des trois suites :**
Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les expressions ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n &= y_n = 2^n \\ z_n &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $2 > 1$, les trois suites sont divergentes de première espèce et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty.}$

3. **Méthode 3 : en connaissant une relation entre les puissances de la matrice**

(a) **Donnons la relation entre $\mathbf{A^2}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I_3}$:**
Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -6 & 22 & -6 \\ -12 & 12 & 4 \end{pmatrix}$. En identifiant les coefficients de A^2 avec $aI_3 + bA$ on obtient

$$\boxed{A^2 = 8I_3 - 2A.}$$

(b) **Étudions l'inversibilité de A :**
Une telle relation permet d'obtenir directement l'inversibilité de A. En effet, on a alors

$$A\left(\frac{A + 2I_3}{8}\right) = I_3.$$

Ainsi, par définition d'une matrice inversible, A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{A + 2I_3}{8} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}}.$

On retrouve bien le résultat de la première méthode.

(c) **Montrons qu'il existe deux suites $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbf{b_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier $\mathbf{n}$: $\mathbf{A^n = a_nA + b_nI_3}$:**

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_nA + b_nI_3$.
- Initialisation : pour $n = 0$:
Comme $A^0 = I_3$, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$. Par hypothèse de récurrence, on sait donc qu'il existe deux nombres réels $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$A^n = a_nA + b_nI_3.$$
Comme $A^{n+1} = A \times A^n$, on obtient en appliquant l'hypothèse de récurrence
$$A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA.$$

Il suffit alors d'utiliser la relation : $A^2 = -2A + 8I_3$ entre les puissances de A pour conclure. On obtient alors

$$A^{n+1} = 8a_n I_3 + (-2a_n + b_n)A.$$

On pose alors $a_{n+1} = -2a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $b_{n+1} = 8a_n \in \mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : il résulte du principe de récurrence
 $\boxed{\text{qu'il existe deux suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I_3.}$

On connaît de plus la relation de récurrence qui lie ces suites :

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n + b_n \\ \qquad\qquad\ \ b_{n+1} = 8a_n. \end{cases}}$$

(d) **Donnons l'expression explicite de $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ puis celle de $\mathbf{A^n}$:**
On remarque que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, on a

$$a_0 = 0 \quad a_1 = -2a_0 + b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n.$$

L'équation caractéristique est alors $r^2 + 2r - 8 = 0$ et le discriminant d'une telle équation est : $\Delta = 36$. Les solutions sont donc -4 et 2. On obtient ainsi

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha(-4)^n + \beta 2^n.$$

Les conditions initiales permettent de calculer α et β. On doit résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ -4\alpha + 2\beta &= 1. \end{cases}$$

On obtient alors $\alpha = -\dfrac{1}{6}$ et $\beta = \dfrac{1}{6}$. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{-(-4)^n + 2^n}{6}.}$$

On en déduit alors l'expression explicite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 8a_{n-1} = \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3}.}$$

On obtient alors pour l'expression de A^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{-(-4)^n + 2^n}{6} A + \frac{2^{n+1} + (-4)^n}{3} I_3 = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + (-4)^n & (-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2^n - (-4)^n & 3(-4)^n - 2^n & 2^n - (-4)^n \\ 2(2^n - (-4)^n) & 2((-4)^n - 2^n) & 2^{n+1} \end{pmatrix}}.$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec les méthodes 1 et 2.

(e) **Calcul de $\mathbf{A^{-n}}$:**
On a vu que $A^{-1} = \dfrac{1}{8}(2I_3 + A)$. On cherche à calculer $(A^{-1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme les matrices $2I_3$ et A commutent car la matrice I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = \frac{1}{8^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A)^k(2I_3)^{n-k} = \frac{1}{8^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}A^k.$$

En utilisant alors l'expression de A^k trouvée dans la question précédente (qui est bien vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$), on obtient

$$
\begin{aligned}
A^{-n} &= \frac{1}{8^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \left[\frac{2^{k+1} + (-4)^k}{3} I_3 + \frac{2^k - (-4)^k}{6} A \right] \\
&= \frac{1}{8^n} \left[\frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^n \right) A - \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k 2^{n-k} \right) A \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n+1} \right) I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k 2^{n-k} \right) I_3 \right] \\
&= \frac{1}{8^n} \left(\frac{2^n 2^n}{6} A - \frac{(-2)^n}{6} A + \frac{2^{n+1} 2^n}{3} I_3 + \frac{(-2)^n}{3} I_3 \right) \\
&= \boxed{\frac{1 - (-1)^n}{6 \times 2^n} A + \frac{2^{n+1} - (-1)^n}{3 \times 4^n} I_3.}
\end{aligned}
$$