

# Table des matières

<b>I Applications d'un ensemble dans un autre</b>	<b>1</b>
I. 1 Définitions et exemples . . . . .	1
I. 2 Image directe . . . . .	2
I. 3 Composition des applications . . . . .	3
<b>II Applications injectives</b>	<b>3</b>
II. 1 Définition et exemples . . . . .	3
II. 2 Cas particulier des fonctions numériques . . . . .	4
<b>III Applications surjectives</b>	<b>4</b>
III. 1 Définition et exemples . . . . .	4
III. 2 Cas des fonctions numériques . . . . .	5
III. 3 Lorsque l'on connaît l'expression de $f$ . . . . .	5
<b>IV Applications bijectives</b>	<b>5</b>
IV. 1 Définition et exemples . . . . .	5
IV. 2 Application réciproque . . . . .	6
IV. 3 Caractérisations . . . . .	6
IV. 4 Cas particulier des fonctions numériques . . . . .	7
IV. 5 Étude de la fonction réciproque . . . . .	7

## CH 8 : Applications

### I Applications d'un ensemble dans un autre

#### I. 1 Définitions et exemples

**Définition 1.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

- Une application (ou fonction) de  $E$  dans  $F$  est un procédé qui associe à tout élément de  $E$  un unique élément de  $F$ .
- $E$  est appelé domaine de définition de  $f$ , ou ensemble de départ.
- $F$  est l'ensemble d'arrivée de  $f$
- $y = f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ .
- $x$  est un antécédent de  $y$  par  $f$ .

**Notations :** On note  $f : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$  ou  $f : x \mapsto f(x)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles.

**Remarques.** • Ne pas confondre  $f$  : la fonction, la "machine" qui fait passer de  $x$  à  $f(x)$  et  $f(x)$  : l'élément de l'espace d'arrivée.  
C'est comme confondre des carottes rapées et le mixeur qui a été utilisé pour les raper.

- Exercice 2.**
1. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2 \end{cases}$ . Donner l'image de 4 par  $f$ . Donner s'ils existent les antécédents de 11, 0 et 5 par  $f$ .
  2. Soit  $g : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 + 2 \end{cases}$ . Donner l'image de 4 par  $g$ . Donner s'ils existent les antécédents de 11, 0 et 5 par  $g$ .
  3. Soit  $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x - y, x + 2y) \end{cases}$ . Donner l'image de (1, 2) par  $F$ . Donner s'ils existent les antécédents de (1, 2, 3) et (2, 1, 1)

## Exemples usuels

### ❶ L'identité :

Soit  $E$  un ensemble. On définit la fonction identité de  $E$  notée  $\text{Id}_E$  par :

### ❷ La fonction caractéristique ou fonction indicatrice d'un ensemble :

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  un sous ensemble de  $E$ . On définit la fonction caractéristique de  $A$  ou fonction indicatrice de  $A$  par

$$\chi_A : \begin{cases} E & \rightarrow \{0, 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

### ❸ Les fonctions numériques :

Exemples : (ne pas oublier les ensembles de départ et d'arrivée)  $f(x) = \exp(x)$

### ❹ Les suites

Ce sont les fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$

### ❺ Exemples de fonctions d'une variable complexe et/ou à valeurs complexes


- $\theta \mapsto e^{i\theta}$
- $z \mapsto \frac{z-i}{z+2}$
- $z \mapsto |z|$

### ❻ Exemples de fonctions à plusieurs variables

- $(x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$
- $(x, y) \mapsto (\exp(x) + \frac{y}{\cos(x)}, 1)$

**Définition 3.** Deux applications  $f$  et  $g$  sont égales si

- Elles ont même ensemble de départ ( $E$ ) et d'arrivée ( $F$ ).
- Et pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = g(x)$

**Remarque.**  Les domaines de départ et d'arrivée sont importants!

## I. 2 Image directe

**Définition 4.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle image directe de  $A$  par  $f$  :

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Ainsi on a toujours  $f(A) \subset F$

Avec des quantificateurs :  $y \in f(A) \iff \exists x \in A f(x) = y$

**Exemples.**

$$\exp(\mathbb{R}) = \quad \cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \quad \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \right) = \quad \ln(]0, 1]) =$$

**Proposition 5.** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Soient  $A, B$  sous-ensembles de  $E$ .

- Si  $A \subset B$  alors  $f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

**Exemples.** Calculer

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \cap \cos\left(\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]\right)$$

puis

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right]\right)$$

**Exemple.** — Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ . Calculer  $f(]-1, 1[)$  et  $f(]-2, 0] \setminus \{-1\})$ .

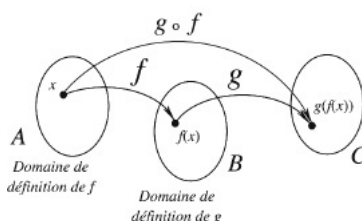
### I. 3 Composition des applications

**Définition 6.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

- On appelle application composée de  $f$  par  $g$  notée  $g \circ f$  l'application définie par

$$g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$$

- Cela correspond au diagramme suivant :



**Exemples.** Calculer pour chacun des cas suivants et lorsque cela a un sens  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

1. On considère les deux applications  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 2. \end{cases}$

2. On considère les deux applications  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{cases}$

3. On considère les deux applications  $f : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{cases}$  et  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^- \\ x & \mapsto & -x^2. \end{cases}$

## II Applications injectives

### II. 1 Définition et exemples

**Définition 7.** Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application.

On dit que  $f$  est injective de  $E$  dans  $F$  ou que  $f$  est une injection de  $E$  dans  $F$  si chaque élément image a au plus un antécédent.

**Exemple.** Parmi les dessins suivants, lequel représente une fonction injective ?

Avec des quantificateurs :

$$\forall x, y \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y$$

$$\forall x, y \in E^2, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

**Exercice 8.** Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ . Montrer que  $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective.

**Exercice 9.** Montrer que l'application  $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$  est injective.

**Exercice 10.** Étudier l'injectivité des fonctions suivantes :

1.  $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$
2.  $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}^+$ .
3.  $z \in \mathbb{C} \mapsto \Re(z) \in \mathbb{R}$ .
4.  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ .

**Remarque.** Pour les fonctions numériques, l'injectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer au plus une fois le graphe de la fonction.

Exemples :

## II. 2 Cas particulier des fonctions numériques

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I \subset \mathbb{R}$ , on peut utiliser la propriété suivante :

**Proposition 11.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  est injective sur  $I$ .

**Remarque.** Lien avec la composition d'égalités par une fonction :

- $a = b \implies f(a) = f(b)$  est toujours vrai.
- $a = b \iff f(a) = f(b)$  seulement quand  $f$  est injective.

Méthode : toujours commencer par étudier la fonction et faire son tableau de variation. Cela permet :

- De prouver directement l'injectivité là où elle est strictement monotone.
- De donner une idée du contre-exemple là où elle n'est pas injective.

**Exercice 12.** Étudier l'injectivité des fonctions  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  et  $g : x \mapsto \frac{x^2}{1 + x}$ .

**Remarque.** Le caractère injectif d'une fonction est lié à son ensemble de départ. Ainsi si  $f$  n'est pas injective, il est possible de restreindre  $f$  sur un ensemble de départ plus petit pour obtenir une injection.

Exemple : trouver un intervalle  $I$  tel que la fonction  $f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$  soit injective.

## III Applications surjectives

### III. 1 Définition et exemples

**Définition 13.** Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$  ou que  $f$  est une surjection de  $E$  dans  $F$  si

Avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

**Exemple.** Parmi les dessins suivants, lequel représente une fonction surjective ?

**Remarque.** Le caractère surjectif d'une fonction est ainsi lié à son ensemble d'arrivée. Ainsi si  $f$  n'est pas surjective, il est possible de restreindre l'ensemble d'arrivée pour obtenir une application surjective.

Exemple :

**Exercice 14.** Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$ . Montrer que  $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective.

**Exercice 15.** Étudier la surjectivité des fonctions suivantes :

1.  $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x \in \mathbb{R}$ .
2.  $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 4x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ .
4.  $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$ .

### III. 2 Cas des fonctions numériques

**Remarque.** Pour les fonctions numériques, la surjectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer ..... le graphe de la fonction.  
Exemples :

On peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

**Proposition 16.** Soit  $f$  une fonction ..... sur un intervalle  $[a, b]$ .  
Alors pour tout  $y$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $y = f(c)$ .

Il est possible de généraliser avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, en utilisant les limites.

**Exercice 17.** Soit la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ . Montrer que  $f$  est surjective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### III. 3 Lorsque l'on connaît l'expression de $f$

Dans le cas d'exercices plus concrets dans lesquels l'expression de la fonction est connue, on peut raisonner par analyse-synthèse en résolvant l'équation  $f(x) = y$ .

- **Analyse** : Soit  $y \in F$ . On résout l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x \in E$ .
- **Synthèse** : deux cas sont possibles.
  - ★ Si pour tout  $y \in F$ , l'équation  $f(x) = y$  admet au moins une solution  $x$  dans  $E$ , alors  $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$ .
  - ★ S'il existe au moins un  $y \in F$  tel que l'équation  $f(x) = y$  n'admet pas de solution  $x$  dans  $E$ , alors  $f$  n'est pas surjective de  $E$  dans  $F$ .

**Exercice 18.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par  $f(z) = \exp(z)$ . Montrer que  $f$  est surjective de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

**Exercice 19.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par  $f(z) = \frac{2z+i}{z-i}$ . Montrer que  $f$  est surjective de  $D_f$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ .

## IV Applications bijectives


### IV. 1 Définition et exemples

**Définition 20.** Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application.

- On dit que  $f$  est bijective de  $E$  dans  $F$  ou que  $f$  est une bijection de  $E$  dans  $F$  si  $f$  est bijective et injective.

Avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

- Remarques.**
- Le caractère bijectif d'une application est ainsi lié à son ensemble de départ et d'arrivée. Ainsi si  $f$  n'est pas bijective, il est possible de restreindre les ensemble de départ et d'arrivée pour obtenir une application bijective.
  -  Que ce soit pour l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application, il est indispensable de toujours bien préciser .....

## IV. 2 Application réciproque

**Proposition 21.** Soient  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. L'application  $f$  est bijective de  $E$  dans  $F$  s'il existe une application  $g$  de  $F$  dans  $E$  telle que l'on ait

L'application  $g$  est alors notée ..... et est appelée .....

**Proposition 22.** Si  $f$  est une application bijective de  $E$  dans  $F$  alors :

- $f^{-1} : \dots\dots\dots$
- $\forall x \in E, \forall y \in F : \dots\dots\dots$

**Proposition 23.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles. Soient  $f$  une application bijective de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application bijective de  $F$  dans  $G$ . Alors :

- .....
- .....

*Démonstration.*

□

**Exemple.** Montrer que l'application  $h : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & [1, +\infty[ \\ x & \mapsto & e^{\sqrt{x}} \end{cases}$  est bijective et calculer  $h^{-1}$ .

## IV. 3 Caractérisations

**Montrer que  $f$  est injective et surjective** Voir les méthodes pour montrer qu'une fonction est injective et surjective.

**Utiliser la caractérisation de l'application réciproque (rare)** Trouver une application  $g$  vérifiant  $f \circ g = Id$  et  $g \circ f = Id$ .

**Par analyse-synthèse** Lorsque l'on connaît l'expression de  $f$ , on peut raisonner par analyse-synthèse en résolvant  $f(x) = y$ . Il faut y penser en particulier lorsque l'on vous demande l'expression de la bijection réciproque.

- Soit  $y \in F$ . On résout l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x \in E$ .
- **Synthèse** : deux cas sont possibles.

★ Si pour tout  $y \in F$ , l'équation  $f(x) = y$  admet une UNIQUE solution  $x$  dans  $E$ , alors  $f$  est bijective de  $E$  dans  $F$ .

On obtient alors l'expression de l'application réciproque :  $f^{-1} : \begin{cases} F & \rightarrow & E \\ y & \mapsto & g(y) \end{cases}$ , où  $g(y)$  est l'unique solution dans  $E$  de  $f(x) = y$ .

★ S'il existe au moins un  $y \in F$  tel que l'équation  $f(x) = y$  admette 0 ou au moins 2 solutions dans  $E$ , alors  $f$  n'est pas bijective de  $E$  dans  $F$ .

**Exercice 24.** Étudier la bijectivité de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  et calculer l'expression de  $f^{-1}$  lorsqu'elle existe.

**Montrer que  $f$  n'est pas bijective**  $f$  non bijective de  $E$  dans  $F \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

#### IV. 4 Cas particulier des fonctions numériques

**Remarque.** Pour les fonctions numériques, la bijectivité s'observe graphiquement en balayant le plan par une droite horizontale qui doit rencontrer  $\dots\dots\dots$  le graphe de la fonction. Exemples :

Théorème de la bijection

**Théorème 25.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique vérifiant :

- $\dots\dots\dots$
- $\dots\dots\dots$

Alors  $\dots\dots\dots$

On peut généraliser à des intervalles ouverts ou semi-ouverts en utilisant les limites. Y penser lorsque l'on demande uniquement de montrer que la fonction est bijective (utiliser directement la méthode par analyse-synthèse si l'énoncé demande aussi l'expression de  $f^{-1}$ ).

**Exercice 26.** Étudier la bijectivité de  $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ .

**Exercice 27.** Étudier la bijectivité des applications suivantes :  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$  et  $g : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ .

#### IV. 5 Étude de la fonction réciproque

**Proposition 28** (Graphe d'une fonction réciproque).

Si  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J$ , alors  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  sont  $\dots\dots\dots$

**Exemple.** Tracer les graphes des fonctions cube et racine cubique.

**Proposition 29** (Monotonie d'une fonction réciproque).

Si  $f$  est bijective et monotone de  $I$  sur  $J$ , alors  $f^{-1} \dots\dots\dots$

**Exercice 30.** Calculer les variations et étudier la bijectivité de la fonction  $f : x \mapsto x^2 - x \ln x - 1$  de  $\mathbb{R}^{++}$  sur un intervalle à déterminer. En déduire les variations de  $f^{-1}$ .

**Théorème 31** (Théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque).

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective, et  $f^{-1} : J \rightarrow I$  sa fonction réciproque. Soit  $x_0 \in I$  tel que :

- .....
- .....

Alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et  $(f^{-1})'(y_0) =$

**Méthode pour étudier la dérivabilité d'une réciproque :**

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée.
- Déterminer tous les points  $x_0$  où  $f'$  s'annule, et calculer les  $y_0 = f(x_0)$  correspondants.
- On sait alors d'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque que :
  - ★  $f^{-1}$  est dérivable sur l'intervalle  $J$  privé de tous les points  $y_0$  calculés ci-dessus.
  - ★ Et pour tout  $y \neq y_0$ , on a :  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

**Exercice 32.** Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction racine cubique.

**Exemple.** Fonctions usuelles :



Fonction	Injective ?	Surjective ?	Bijective ?
sinus : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
cosinus : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
tangente : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$			
exponentielle : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
logarithme : $]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$			
carrée : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
cube : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
racine carrée : $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$			
inverse : $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$			
valeur absolue : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			