Programme de colle : Semaine 15
Lundi 23 Janvier

I Calcul matriciel

1. Définition des matrices $M_{np}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Matrices carrées, diagonales, triangulaires (supérieures, inférieures), matrice nulle, matrice identitée (notée I_n), matrices élémentaires (notées E_{ij} - peu vues).
2. Somme de matrices, produits de matrices, puissance n-éme.
3. Définition de deux matrices qui commutent. Binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{K})$.
4. L'inversibilité sera vu lundi.

II Vocabulaire des applications

1. Fonction d'un ensemble quelconque dans un autre.
2. Fonction injective, surjective, bijective.
3. Expression de la bijection réciproque.
4. Dérivée de la bijection réciproque d'une fonction réelle.
5. Etude de arctan et de sa dérivée.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothéque matplolib.pyplot et numpy. (vu que par un groupe)
8. Savoir tracer un graphique. (vu que par un groupe)

IV Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothéque matplotlib.pyplot.
5. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, A^2, AC, ${}^tB{}^tA$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et ${}^tBX$.

(b) Résoudre l'équation, d'inconnue X : $CX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. On considère la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer N^2. Donner une relation entre N^2, N et I_3.

(b) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I.$$

(c) En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Dire si les fonctions suivantes sont injective, surjective, bijective ? Dans le dernier cas, donner la bijection réciproque.

— $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

— $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 \end{array} \right.$

— $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(2\pi x) \end{array} \right.$

— $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

— $f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z+i}{z-i} \end{array} \right. .$

— $f_6 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \frac{2}{\pi}\arctan(x) \end{array} \right. .$

8. Avec les notations précédentes. Calculer les images directes suivantes :

$$f_1([-1,1]), \qquad f_2([-1,1]), \qquad f_3([-1,1]), \qquad f_5([-1,1]), \qquad f_6([-1,1])$$