Programme de colle : Semaine 16
Lundi 30 Janvier

Programme du DS de vendredi 3/02 :

1. Intégration.
2. Matrices.
3. Vocabulaire des applications (injectivité, surjectivité, bijectivité)

I Calcul matriciel

1. Définition des matrices $M_{np}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Matrices carrées, diagonales, triangulaires (supérieures, inférieures), matrice nulle, matrice identitée (notée I_n), matrices élémentaires (notées E_{ij} - peu vues).
2. Somme de matrices, produits de matrices, puissance n-éme.
3. Définition de deux matrices qui commutent. Binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{K})$.
4. Notion de rang
5. Inversibilité ($AB = BA = I_n$)
6. Inversibilité $\iff$ rang maximal $\iff$ unique solution à $AX = 0 \iff$ unique solution à $AX = Y$ pour tout $Y \in M_{n1}(\mathbb{K})$

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothéque matplolib.pyplot et numpy. (vu que par un groupe)
8. Savoir tracer un graphique. (vu que par un groupe)

III Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3+3x+1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothéque matplotlib.pyplot.
5. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

6. On considère la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer N^2. Donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible. Si oui donner son inverse.
   (b) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I.$$
   (c) En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à étudier l'inversibilité de A et à calculer les puissances n-ièmes de A en utilisant les diverses méthodes vues en cours et en TD.
   (a) Méthode une : Par diagonalisation :
      i. Résoudre $(A - \lambda I_3)X = O_{31}$.
      ii. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
      iii. Calculer $P^{-1}AP$. En notant D cette matrice, exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D.
      iv. Calculer les puissances n-ièmes de A.
      v. Étudier l'inversiblité de A. Si A est inversible, calculer son inverse.
   (b) Méthode deux : Par le binôme de Newton :
      i. Soit $B = A - 2I_3$. Calculer B^n en fonction de B pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. En déduire alors les puissances n-ièmes de A.
   (c) Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :
      i. Montrer que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
      ii. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $A^n = a_n A + b_n I_3$.
      iii. Calculer les expresions explicites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire les puissances n-ièmes de A.
      iv. Montrer que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et de I_3.
      v. En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3 pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.