DS 5

Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Calculer

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x e^{2x} dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt$. (On pourra effectuer le changement de variable $t^2 = u$.)

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, 3x + y)$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Justifier que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution à l'équation d'inconnue (x, y) :

$$f(x, y) = (X, Y)$$

3. En déduire que f est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3.

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

2. Etablir que f est impaire. (Afin de caculer $f(-x)$, on pourra effectuer le changement de variable $t = -u$)
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}$.
   (c) Résoudre l'équation $\varphi(x) \geq 0$.
   (d) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2 + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
5. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à déterminer.
6. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 4. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(M - \mathrm{Id})^2$. Donner son rang.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
3. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
5. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
6. Montrer par récurrence que

$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T^n = P^{-1}M^nP$$

8. En déduire la valeur de M^n.
9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 2x_n + y_n \\ y_{n+1} & = & y_n \\ z_{n+1} & = & -x_n + z_n \end{cases}$$

   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Etablir une relation entre U_n, U_{n+1} et M.

   (b) En déduire (et la prouver) une relation entre U_n U_0 et M

   (c) Donner finalement l'expression de x_n en fonction de n.

Dernier exercice page suivante.

Exercice 5. 1. On considère la chaine de caractère `ch = "1234"`.

(a) Quel est le type de `ch[0]` ? Quelle est sa valeur ?

(b) Quel est le type de `int(ch[3])` ? Quelle est sa valeur ?

(c) Quel est le type de `"1" + str(2)` ? Quelle est sa valeur ?

2. Écrire une fonction `StringToList` qui prend comme argument d'entrée une chaine de caractères représentant un nombre entier positif (de longueur quelconque) et qui renvoie la liste des chiffres qui composent l'entier représenté par la chaine de caractères.

   Par exemple, l'instruction `StringToList("1234")` *renverra la liste d'entiers* `[1, 2, 3, 4]`.

3. Écrire une fonction `distribution` qui, à partir d'une liste d'entiers compris entre 0 et 9, renvoie une liste `L` telle que, pour tout $i \in [\![0, 9]\!]$, `L[i]` contienne le nombre d'entiers `i` dans la liste passée en argument.

   Par exemple, `distribution([4, 7, 7, 1])` r*enverra la liste* `[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0]`.

4. On considère une fonction `NbEntiersCommuns` qui renvoie le nombre d'entiers en commun (mais pas nécessairement placés aux même endroit) dans deux listes d'entiers (compris entre 0 et 9) passées en argument.

   Par exemple, `NbEntiersCommuns([4, 7, 7, 1], [4, 4, 7, 7])` *renverra* 3.

   Parmis les fonctions suivantes, indiquer (sans justifier) l'unique fonction qui correspond à celle décrite ci-dessus.

```python
def NbEntiersCommuns1(L,M) :
    s = 0
    for k in range(len(L)) :
        s += min(L[k], M[k])
    return s
```

```python
def NbEntiersCommuns3(L,M) :
    nb = 0
    for k in range(len(L)) :
        i = 0
        while i < len(M) :
            if L[k] == M[i] :
                nb = nb + 1
    return nb
```

```python
def NbEntiersCommuns2(L,M) :
    nb = 0
    dL = distribution(L)
    dM = distribution(M)
    for k in range(10) :
        nb += max(dL[k], dM[k])
    return nb
```

```python
def NbEntiersCommuns4(L,M) :
    s = 0
    dL = distribution(L)
    dM = distribution(M)
    for k in range(10) :
        s += max(dL[k], dM[k])
    return s
```