DM 11 - Probabilité

Exercice 1. Une urne A contient 1 boule rouge et 2 noires. Une urne B contient 3 rouges et 1 noire. Au départ, on choisit une urne, la probabilité de choisir l'urne A est $p \in]0,1[$. Puis on choisit une boule dans cette urne. Si, à un tirage quelconque, on a tiré une boule rouge, le tirage suivant se fait dans A, sinon, on choisit une boule de B. Les tirages se font avec remise. On note p_n la probabilité de choisir une boule rouge au tirage de numéro n.

1. Calculer p_1.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. En déduire p_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Correction 1. On note R_n l'événement " tirer une Rouge au tirage n" et N_n : " tirer une Noire au tirage n". On a évidemment $\overline{N_n} = R_n$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(R_{n+1}) \quad \text{Par définition} \\ &= \mathbb{P}(R_{n+1}|R_n)\mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}(R_{n+1}|N_n)\mathbb{P}(N_n) \quad \text{Par la formule des probabilités totales} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(R_{n+1}|R_n) = \frac{1}{3}$ car si on a tiré une boule rouge au tirage n le tirage se fait dans l'urne A qui contient 3 boules dont seuleemnt une noire. De même $\mathbb{P}(R_{n+1}|N_n) = \frac{3}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) \\ &= \frac{-5}{12}p_n + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

C'est une suite arithmético géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = \frac{-5}{12}\ell + \frac{3}{4}$$

on trouve $\ell = \frac{9}{17}$ On sait d'après le cours (ou on refait le calcul) que la suite $u_n = p_n - \ell$ est géométrique de raison $\frac{-5}{12}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_n = u_1 \left(\frac{-5}{12}\right)^{n-1}$$

et $u_1 = p_1 - \frac{9}{17}$ Il faut encore calculer p_1 On a $p_1 = \mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R_1|B)\mathbb{P}(B)$ d'après la formule des probabilités totales (ici A et B sont les événements 'choix de l'urne .... ') On a donc $p_1 = \frac{1}{3}p + \frac{3}{4}(1-p) = \frac{-5}{12}p + \frac{3}{4}$

Finalement $u_1 = \frac{-5}{12}p + \frac{3}{4} - \frac{9}{17} = \frac{-5}{12}p - \frac{15}{68}$

Et

$$p_n = \frac{9}{17} + \left(\frac{-5}{12}p - \frac{15}{68}\right)\left(\frac{-5}{12}\right)^{n-1}$$

La limite de p_n est $\frac{9}{17}$.

Exercice 2. On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

   En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n). Interpréter le résultat.

Correction 2.

1. Puisqu'en $n = 0$ le pion est en A, on a $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. A l'étape $n = 1$, d'après les informations de l'énoncé, $a_1 = 1/2, b_1 = c_1$. Puisque $a_1 + b_1 + c_1 = 1$, on a $b_1 = c_1 = 1/4$.

2. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})\, P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})\, P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})\, P(C_n).$$

Comme à la question précédente, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2, P_{B_n}(A_{n+1}) = 1/4$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$. On en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

En raisonnant de la même façon, ou par symétrie,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

4. On a $V^n = M^n V_0$, ce qui donne

$$\begin{cases} a_n = \frac{4^n+1}{3\cdot 4^n} \\ b_n = \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n} \\ c_n = \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n} \end{cases}$$

On remarque qu'on a bien $a_n + b_n + c_n = 1$.