Correction : DS 6

Exercice 1. Soit P_1 le plan de l'espace d'équation $x+y+z+1=0$ et P_2 le plan de l'espace d'équation $2x-y-z+2=0$

1. Justifier que ces deux plans s'intersctent le long d'une droite que l'on note D
2. Donner un vecteur directeur de D.
3. Soit A le point de coordonnées $(2,1,0)$. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de A sur P_1

Correction 1.

1. Soit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ les vecteurs normaux respectifs de P_1 et P_2.
   Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas paralléles.
   $$\boxed{\text{Les deux plans s'intersectent le long d'une droite.}}$$
2. $(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+1 & = & 0 \\ 2x-y-z+2 & = & 0 \end{array}\right. \iff_{L2 \to L2-2L1} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+1 & = & 0 \\ -3y-3z & = & 0 \end{array}\right.$
   Donc
   $$(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & z-1 \\ y & = & -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z-1 \\ y & = & -z \end{array}\right.$$
   Les solutions de ce système sont donc
   $$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(2z-1,-z,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-1,0,0) + z(2,-1,1) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$
   $$\boxed{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } P_1 \cap P_2}$$
3. Soit Δ la droite orhogonale à P_1 passant par A. Δ a pour équation paramétrique
   $$\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 0+t \end{array}$$
   En injectant ces coordonnées dans l'équation de P_1 on obtient
   $$2+t+1+t+t+1=0$$
   Ce qui donne $3t+4=0$ d'où $t=\frac{-4}{3}$
   Les coordonnées (x_H, y_H, z_H) du projeté orthogonal H de A sur P_1 vérifient donc
   $$\begin{array}{rcl} x_H & = & 2+\frac{-4}{3} \\ y_H & = & 1+\frac{-4}{3} \\ z_H & = & 0+\frac{-4}{3} \end{array}$$
   Finalement

$$\boxed{H \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-4}{3}\right)}$$

Exercice 2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$: $2x+5y-10=0$ et de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(-1,2)$ et dirigée par $\vec{u}(3,2)$.

Correction 2. La droite $\mathcal{D}'$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1+3t \\ y & = & 2+2t \end{array}$$

En injectant dans l'équation de $\mathcal{D}$ on obtient

$$2(-1+3t)+5(2+2t)-10=0$$

Ce qui donne $16t-2=0$ soit $t=\frac{1}{8}$

Le point $M=(x_M,y_M)$ intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ vérifie donc

$$\begin{array}{rcl} x_M & = & -1+3\frac{1}{8} \\ y_M & = & 2+2\frac{1}{8} \end{array}$$

Finalement

$$\boxed{M \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{5}{8}, \frac{9}{4}\right)}$$

Exercice 3. Soit $P_0=1$ et pour $n\geq 1$, $P_n=(X^2-1)^n$.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Donner les racines de P_n ainsi que leur multiplicités.

   Soit $Q_n=P_n^{(n)}$ où (n) désigne la dérivée n-éme.
3. Calculer Q_0, Q_1 et Q_2.
4. Que vaut $P_n^{(n-1)}(1)$ et $P_n^{(n-1)}(-1)$?
5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = -\int_{-1}^{1} P_n^{(n+1)}(x)P_m^{(m-1)}(x)dx$$
6. Montrer à l'aide d'une récurrence sur k que pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ et tout $k\in[\![0,m]\!]$ que
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k\int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k)}(x)dx$$
7. On suppose que $n<m$ que vaut $P_n^{(n+m)}$?

8. On suppose que $n < m$ déduire des questions précédentes que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = 0$$

Correction 3.

1. $deg((X^2-1)^n) = ndeg(X^2-1) = 2n$

$$\boxed{deg(P_n) = 2n}$$

Le binome de Newton donne

$$P_n = (X^2)^n + Q_n$$

où Q_n est un polynome de degré strictement inférieur à $2n$. Donc

$$\boxed{\text{Le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut } 1}$$

2. $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Donc

$$P_n = (X-1)^n(X+1)^n$$

Ainsi

$$\boxed{P_n \text{ admet } 1 \text{ et } -1 \text{ comme racines, chacune de multiplicités } n.}$$

3. — $Q_0 = P_0 = 1$
   — $Q_1 = P_1^{(1)} = P_1' = 2X$
   — $Q_2 = P_2^{(2)} = P_2''$ Or $P_2 = (X^4 - 2X^2 + 1)$ donc $P_2' = 4X^3 - 4X$ et $P_2'' = 12X^2 - 4$

$$\boxed{Q_0 = 1,\ Q_1 = 2X \text{ et } Q_2 = 12X^2 - 4}$$

4. 1 et -1 sont racines de multiplicités n de P_n. Donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$$

En particulier

$$\boxed{P_n^{(n-1)}(1) = P_n^{(n-1)}(-1) = 0}$$

5. Soit $v(x) = P_m^{(m-1)}(x)$. v est un polynome donc dérivable et

$$v'(x) = \left(P_m^{(m-1)}\right)'(x) = P_m^{(m)}(x) = Q_m(x)$$

6. Soit $u = Q_n$ et $v = P_m^{(m-1)}$. On a donc $v'(x) = Q_m(x)$ et $u'(x) = P_n^{(n+1)}(x)$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx &= \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$
D'une part $[u(x)v(x)]_{-1}^{1} = Q_n(1)P_m^{(m-1)}(1) - Q_n(-1)P_m^{(m-1)}(-1)$ Or d'aprés la question 4, $P_n^{(n-1)}(1) = P_n^{(n-1)}(-1) = 0$ Donc
$$[u(x)v(x)]_{-1}^{1} = 0$$
D'autre part, en reprenant les définitions de u' et v on a
$$\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n^{(n+1)}(x)P_m^{(m-1)}(x)dx$$
Au final
$$\boxed{\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = -\int_{-1}^{1} P_n^{(n+1)}(x)P_m^{(m-1)}(x)dx}$$

7. Soit $H(k)$ la propriété $H(k) =$ " $\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k})(x)dx$"
On va prouver H par récurrence.
   — Initialisation
$$H(0) = \text{"} \int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^0 \int_{-1}^{1} P_n^{(n+0)}(x)P_m^{(m-0})(x)dx\text{"}$$
$$H(0) = \text{"} \int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n^{(n)}(x)P_m^{(m})(x)dx\text{"}$$
   Par définition $Q_n = P_n^{(n)}$ et $Q_m = P_n^{(m)}$, donc $H(0)$ est vérifiée.
   — Hérédité
   On suppose que la propriété H est vraie à un certain rang $k \in [\![0, m-1]\!]$ on va montrer que $H(k+1)$ est vraie.
   On a donc par hypothése de récurrence
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k})(x)dx$$
   On pose $u(x) = P_n^{(n+k)}(x)$ et $v(x) = P_m^{(m-k-1})(x) = P_m^{(m-(k+1)})(x)$ On a donc
$$u'(x) = P_n^{(n+k+1)}(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = P_m^{(m-k})(x) = P_m^{(m-k)})(x)$$
   On fait alors une intégration par parties et on obtient

Ainsi

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k)}(x)dx = \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)dx$$
$$= [u(x)v(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u'(x)v(x)dx$$

D'une part $[u(x)v(x)]_{-1}^{1} = P_n^{(n+k)}(1)P_m^{(m-(k+1))}(1) - P_n^{(n+k)}(-1)P_m^{(m-(k+1))}(-1)$
Or d'aprés la question 4, $P_m^{(m-(k+1))}(1) = P_m^{(m-(k+1))}(-1) = 0$ (car $k+1 \leq m$) Donc

$$[u(x)v(x)]_{-1}^{1} = 0$$

D'autre part, en reprenant les définitions de u' et v on a

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k+1)}(x)P_m^{(m-(k+1))}(x)dx$$

Au final on a

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k)}(x)dx$$
$$= (-1)^k(- \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k+1)}(x)P_m^{(m-(k+1))}(x)dx$$
$$= (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} P_n^{(n+(k+1))}(x)P_m^{(m-(k+1))}(x)dx$$

La propriété est bien héréditaire.

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \forall k \in [\![0,m]\!],\ \int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^k \int_{-1}^{1} P_n^{(n+k)}(x)P_m^{(m-k)}(x)dx}$$

8. Si $n > m$ alors $n+m > 2n$ et comme P_n est de degré $2n$ on a

$$\boxed{P_n^{(n+m)} = 0}$$

9. D'après la question 6 appliqué à $k = m$ on a

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = (-1)^m \int_{-1}^{1} P_n^{(n+m)}(x)P_m(x)dx$$

Or d'après la question 7, $P_n^{(n+m)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\boxed{\int_{-1}^{1} Q_n(x)Q_m(x)dx = 0}$$

Exercice 4. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Expliciter T_2 et T_3
2. Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que le degré de $T_n = n$ et son coefficient dominant vaut 2^n.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ que
$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta$$
4. En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
5. Résoudre $\cos(n\theta) = 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$
6. Déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$.
7. Justifier que l'on obtient ainsi toutes les racines de T_n.
8. En déduire la factorisation de T_n dans $R[X]$

Correction 4.

1. $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et
$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 2X - X = 4X^3 - 3X$
$$\boxed{T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X}$$
2. Soit $S(n)$ la propriété $S(n)$: " $deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant vaut 2^n".
   - Initialisation :
   $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ donc $S(0)$ et $S(1)$ sont vraies.
   - Hérédité :
   On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S(n)$ et $S(n+1)$ sont vraies. Nous allons montrer $S(n+2)$.
   La définition de T_n donne
   $$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$
   Par hypothése de récurrence $deg(T_{n+1}) = n + 1$ et $deg(T_n) = n$ Donc $deg(2XT_{n+1}) = n + 2 > n$ et donc
   $$deg(T_{n+2} = \max(deg(2XT_{n+1}), deg(T_n)) = n + 2$$
   De même par hypothése de récurrence
   $$T_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + R_n$$
   où $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ on a donc
   $$\begin{aligned} T_{n+2} &= 2X(2^{n+1}X^{n+1} + R_n) - T_n \\ &= 2^{n+2}X^{n+2} + 2XR_n - T_n \end{aligned}$$
   Or $deg(2XR_n) \leq n+1 < n+2$ et $deg(T_n) = n < n+2$ donc le coefficient dominant de $T_{n+2} = 2^{n+2}$

— Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ deg(T_n) = n \text{ et le coefficient de } T_n \text{ vaut } 2^n}$$

3. D'une part

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\theta) &= \cos(n\theta + 2\theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos(n\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - \sin(n\theta)2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - \sin(n\theta)2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ à la dernière ligne.
On a donc

$$\begin{aligned}2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) &= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(n\theta)(2\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta)\sin(n\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta}$$

4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $H(n)$ la propriété $H(n) :' T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)'$

   — Initialisation :
   $T_0 = 1$ donc $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ donc $H(0)$ est vraie.
   $T_1 = X$ donc $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$ donc $H(1)$ est vraie.

   — Hérédité
   On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ et $H(n+1)$ sont vraies. Nous allons montrer $H(n+2)$.
   La définition de T_n donne

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

   Donc

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(\theta) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta)) \quad \text{Par hypothése de récurrence} \\ &= \cos((n+2)\theta) \quad \text{D'après la question 3}\end{aligned}$$

   — Conclusion :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

5.
$$\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \qquad \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$$

Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ sont
$$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Les solutions sur $[0,\pi]$ sont donc
$$\boxed{S_{[0,\pi]} = \{\tfrac{\pi+2k\pi}{2n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

6. Soit x une racine de T_n sur $[-1,1]$. On peut donc écrire $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0,\pi]$ et on a donc
$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \\ &\iff \cos(n\theta) \quad \text{Q.4} \\ &\iff \theta in\{\frac{\pi+2k\pi}{2n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\} \quad \text{Q.5} \end{aligned}$$

Ainsi les racines de T_n sur $[-1,1]$ sont donc
$$\boxed{R = \{\cos\left(\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}\right) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

7. On a obtenu n raicines distinctes. Or T_n est de degré n qui a donc au plus n racines.
$$\boxed{\text{On a donc obtenu toutes les racines de } T_n}$$

8. T_n se factorise donc de la manière suivante
$$\boxed{T_n = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{2n}\right)\right)}$$

Exercice 5. On souhaite représenter informatiquement un polynôme. Pour cela à un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on associe la liste $[a_0, a_1, \dots, a_n]$. Par exemple le polynôme $P = 1 + X + X^3$ serait représenté par la liste $L = [1,1,0,1]$

1. Soit $Q = 1 + X^2 - 2X^3 + X^5$. Donner la liste représentant Q.
2. Expliciter le polynôme représenté par la liste `[0,0,1,0,0]`. Donner une autre liste qui représente aussi ce polynôme.

3. Ecrire une fonction `evaluation` qui prend en argument un flotant x et une liste L qui représente un polynôme P et retourne la valeur de $P(x)$. Par exemple `evaluation([1,1,0,1],2)` doit retourner la valeur 11.
4. Ecrire une fonction `simplification` qui prend en argument une liste `L` et retourne une liste qui ne comporte pas de 0 à droite. Par exemple `simplication([1,1,0,1])` retourne `[1,1,0,1]` et `simplication([1,1,0,1,0,0,0,0])` retourne `[1,1,0,1]`
5. Ecrire une fonction `degre` qui prend en argument une liste `L` représentant un polynôme P et retourne le degré de P. Par exemple `degre([1,1,0,1])` retourne 3. On fera attention qu'un polynôme puisse être représenté par plusieurs listes comme on l'a vu dans la question 2
6. Que fait la fonction suivante ?

```python
def mystere(L1,L2):
  n1,n2 =len(L1), len(L2)
  L1=L1+[0]*len(L2)
  L2=L2+[0]*len(L1)
  return(L1,L2)
```

7. Ecrire une fonction `somme` qui prend en agument deux listes `L1` et `L2` représentant des polynômes P_1 et P_2 et retourne une liste qui correspond au polynôme $P_1 + P_2$. Par exemple `somme([1,2,3],[0,-2])` retourne `[1,0,3]`
8. Que fait la fonction suivante où L est une liste qui représente un polynôme P.

```python
def mystere2(L):
  D=[]
  for k in range(1,len(L)):
     D.append(k*L[k])
  return(D)
```

9. Ecrire une fonction `multipl` qui prend en argument une liste qui correspond à un polynôme P et retourne une liste qui correspond au polynôme $2XP$. Par exemple `multipl([1,1,0,1])` retourne `[0,2,2,0,2]`
10. Ecrire une fonction `Tchebychev` qui prend en argument un entier n et retourne la liste correspondant au polynôme V_n défini par $V_0 = 1$, $V_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+2} = 2XV_{n+1} + V_n$$

Par exemple `Tchebychev(1)` retourne `[0,1]`

Correction 5.

1. Q est représenté par `[1,0,1,-2,0,1]`
2. `[0,0,1,0,0]` représente le polynôme X^2. Il est aussi représenté par la la liste `[0,0,1]`
3.

```python
def evaluation(L,x):
  v=0
  for i in range(len(L)):
    v=v+L[i]*x**i
  return(v)
```

4.
```python
def simplification(L):
  while len(L)>0 and L[-1]!=0 :
    L.pop()
  return(L)
```

5.
```python
def degre(L):
  simplification(L) #permet de supprimer les 0 inutiles
  return(len(L)-1) #attention le degre n'est pas egal a la longueur d
```

6. Cette fonction retourne les liste $L1$ et $L2$ où l'on a ajouté des 0 à leur fin afin que les deux listes soient de même tailles. En particulier

   $$\boxed{\texttt{len(mystere(L1,L2)[0]) = len(L1) +len(L2)}}$$

   ARgh c'est faux! c'est ce que je voulais faire mais je me suis trompé dans le code. Avec le code actuel la longueur de L1 est de len(L1) +len(L2). Mais comme L2 est actualisé aprés, la longueur de L2 est de len(L2) +(len(L1) +len(L2)).

   Voilà la fonction qui permet d'avoir des listes de meme tailles :

```python
def mystere(L1,L2):
  n1,n2 =len(L1), len(L2)
  L1, L2 =L1+[0]*len(L2), L2+[0]*len(L1)
  return(L1,L2)
```

   Dans cette fonction l'affectaion est simultanée et donc les listes ont bien la même longueur *in fine*

7.
```python
def somme(L1,L2):
 L1,L2 =mystere(L1,L2)
 s=[]
 for i in range(len(L1)):
   s.append(L1[i]+L2[i])
 return(simplification(s))
```

8. `mystere2` calcule les coefficients de la liste correspondant au polynome dérivé de P.

9.
```python
def multip(L):
  M=[0]
  for ak in L:
    M.append(2*ak)
  return(M)
```

```python
def Tchebychev(n):
  Vn=[1]
  Vnplus1=[0,1]
  for i in range(n):
    Vn,Vnplus1 = Vnplus1, somme(mutiplt(Vnplus1),Vn)
  return(Vn)
```