Math/Info : Sommes de Riemann

I Une méthode de calcul approché d'intégrale : la méthode des rectangles

Nous allons ici utiliser la méthode dite des rectangles pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On se limite ici au cas d'une fonction f continue sur le segment $[0,1]$. On souhaite approcher $\int_0^1 f(t)dt$.

- Subdivision régulière de $[0,1]$ de pas $\frac{1}{n}$: c'est la subdivision de $[0,1]$ de la forme

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < ... < x_k = \frac{k}{n} < ... < x_n = 1$$

- Approximation de $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$:
  - ⋆ Approximation à gauche : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \simeq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
  - ⋆ Approximation à droite : $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \simeq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$
- Approximation de $\int_0^1 f(t)dt$:
  - ⋆ Approximation à gauche :
  - ⋆ Approximation à droite :

II Sommes de Riemann, théorème de Riemann

Définition 1. $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ sont appelées sommes de Riemann associées à f

Exercice 2.
1. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un nombre n et une fonction f et retourne la valeur de R_n
2. Faire de même avec S_n.

Théorème 3. Si f est continue sur $[0,1]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt$$

Exemples d'application Ce théorème permet de calculer la limite de certaines sommes.

- Mettre u_n sous la forme $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ou $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
- D'après le théorème sur les sommes de Riemann : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 4. Calculer la limite des suites définies $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$$

Remarques :

- On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - S_n\right| \leq \frac{M}{n}$$

où M est le maximum de f sur $[0,1]$.

Exercice 5. En déduire un programme Python qui permet de calculer $\ln(2)$ à 10^{-2} prés.

III Généralisation

On peut généraliser ce résultat sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) quelconque. Les sommes de Riemann sont alors définies par :

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

De plus, cette méthode permet de définir l'intégrale de fonctions qui ne sont pas continues.

Définition 6. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur I si pour tout segment $[a, b]$ de I, on peut trouver une subdivision $(x_i)_{i=0\dots n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- f admet des limites finies en x_i et x_{i+1}

Exemples.

- $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ (exemple très important pour la deuxième année)
- $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
- $x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Théorème 7. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors : f est intégrable sur $[a, b]$

Remarque. On trouve la valeur de l'intégrale en calculant l'intégrale sur chaque intervalle où la fonction est continue, puis en utilisant la relation de Chasles.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_{-1/2}^{2} \lfloor t \rfloor \, dt$

Exercice 9. Ecrire un programme Python qui permet de calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x} dx$

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$ quand :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
5. $S_n = \displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $S_n = \displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{2n}}$