TD limites et continuité : correction

I Calculs de limites

Correction 1. Je ne détaille pas tous les calculs.

1. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{x^2+x+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to-\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Donc par propriété sur la composition de limite, on obtient que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{2x} - e^{x}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les composition et somme de limites, on obtient que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2x}. On obtient que : $f(x) = e^{2x}(1 - e^{-x})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^{x}+x^2+x+1}{e^{2x}+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $e^{2x}+1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes strictement positifs. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to-\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Puis par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites, on obtient que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^x) et au dénominateur e^{2x}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
4. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 1 \neq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
   - Limite en 0^- : Par propriété sur les somme, quotients et composée de limites : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

- Limite en 0^+ : FI. On fait apparaître une croissance comparée en posant $X = \frac{1}{x}$ et écrivant que : $f(x) = F(X) = \frac{e^X}{1-X}$. Quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$. Donc on a encore une FI. On fait alors apparaître une croissance comparée en écrivant que : $F(X) = \frac{e^X}{X} \times \frac{X}{1-X}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ et par théorème sur les monômes de plus haut degré, on a : $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{1-X} = -\infty$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim_{X\to+\infty} F(X) = -\infty$. Enfin par propriété sur la composition de limite, on obtient que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0^+$.
- Limite en 1^- : Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^-$.
- Limite en 1^+ : Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^+$.

5. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les sommes et composées de limites, on obtient que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{x^2}. On obtient que $f(x) = e^{x^2}(1 - e^{-x^2+x+1})$. Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim_{x\to+\infty} -x^2 + x + 1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

6. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\frac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Limite en 0^+ : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x. On obtient alors $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

7. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{e^x+x^2}{2x+1}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{e^x+x^2}{2x+1} > 0$ et $2x+1 \neq 0$. Comme le numérateur est toujours strictement positif comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif, on a : $\frac{e^x+x^2}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
   - Limite en $-\frac{1}{2}^+$: Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

- Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x au numérateur et x au dénominateur. On obtient que : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x} \times \frac{1+\frac{x^2}{e^x}}{2+\frac{1}{x}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+4}\right)}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $\frac{2-x}{x+4} > 0$ et $x+4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\mathcal{D}_f =]-4, 2[$.
   - Limite en -4^+ : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.
   - Limite en 2^- : Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

9. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \frac{2^x}{x^2+1}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est toujours bien définie car $x^2+1 \neq 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Limite en $-\infty$: Par propriété sur les produits, somme, composée et quotient de limites, on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   - Limite en $+\infty$: FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur x^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $f(x) = \frac{e^{\ln 2x}}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln 2x}}{x^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

10. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln x}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les produits et composée de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - Limite en $+\infty$: FI car $f(x) = \ln(x) e^{-x\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par x. On obtient que : $f(x) = \frac{x}{e^{\ln 2x}} \times \frac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\ln 2x}} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

11. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les composée et quotient de limites, on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on transforme l'expression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par exemple $X = \sqrt{x}$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \frac{e^X}{X^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

12. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x > 0$ car $x^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln x}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Limite en 0^+ : Par propriété sur les produit, composée et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^x. On obtient que : $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
13. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
    - Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$.
14. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x - 2 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
    - Par propriété sur les sommes, quotient, composée et produit de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$.
15. **Calcul des limites aux bornes du domaine de définition de f avec $\mathbf{f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2 + 1 > 0$ et $x \neq 0$ La première inéquation est toujours vraie comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
    - Limite en $-\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln|x|}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
    - Limite en $+\infty$: FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
    - Limite en 0 : FI donc on fait apparaître la limite connue suivante $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ en écrivant que : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times x$. On a ainsi d'après les limites usuelles et par composition que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Correction 2. Avec des polynômes. Je ne donne ici que les résultats et l'idée d'une méthode possible pour obtenir la limite.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}=0$: théorème du monôme de plus haut degré.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}=-\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}=+\infty$: on met x en facteur puis propriété sur les limites.
4. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}=\dfrac{4}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
5. $\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}=\dfrac{4}{3}$: on met $x+5$ en facteur.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x}{2x^2-1}=-\infty$: théorème du monôme de plus haut degré.
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}=\dfrac{5}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites ou on peut aussi reconnaître un taux d'accroissement.
8. $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=12$ et $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=-12$: on met $x+2$ en facteur au numérateur puis propriété sur les limites.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos x}{2\cos^2 x-3\cos x+1}=\lim\limits_{X\to 1}\dfrac{X^2-X}{2X^2-3X+1}=1$: on met $X-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x+1-x|x-3|=1$ car on peut prendre $x>3$ et par propriété de la valeur absolue.
11. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-3x+1-x|x-3|=+\infty$ car on peut prendre $x<3$ et par propriété de la valeur absolue.

Correction 3. Fonctions exponentielle et logarithme.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\to+\infty}e^{\frac{X-1}{X+1}}=e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^{\frac{X-1}{X+1}}=e$ par composition et le théorème sur le monôme de plus haut degré.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+}e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\to -1^+}e^{\frac{X-1}{X+1}}=0$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-}e^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\to -1^-}e^{\frac{X-1}{X+1}}=+\infty$ par composition et par propriété sur les limites. Il n'y a donc pas de limite en $\dfrac{1}{e}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a,\ a>0$: en utilisant par exemple $\ln(1+ax)\underset{0}{\sim}ax$ puis $\dfrac{1}{x}\ln(1+ax)\underset{0}{\sim}a$ et enfin en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}-e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)$. On a
$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}-e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)=x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1-e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)=x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\left(1-e^{\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}}\right).$$
En utilisant l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 et par substitution, on obtient :
$$x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}-e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)\underset{+\infty}{\sim}x\sqrt{x}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}\frac{-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}\underset{+\infty}{\sim}\frac{-x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}.$$
On a utilisé ici aussi le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}=1$ et qu'il est donc équivalent à 1 en $+\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}=e^{-1}$ en utilisant par exemple $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\ln x}$ par substitution puis en multipliant par $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ puis en repassant aux limites pour pouvoir composer par l'exponentielle.

7. $\lim_{x\to 1^+}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}=1$ en posant $X=\ln x$ qui tend vers 0^+ quand x tend vers 1^+ et en écrivant que : $\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}=e^{-X\ln\left(1+\frac{1}{X}\right)}=e^{-X\ln(X+1)+X\ln X}$ et en utilisant la croissance comparée et les propriétés sur les limites.
8. $\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)^{1/x}=e$ en mettant le terme prépondérant e^x en facteur dans le logarithme népérien et en séparant avec $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ puis propriétés sur les limites.
9. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$. On a : $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=e^{x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}$. Or on a
$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)=\ln\left(\frac{\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right)=\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right).$$
De plus, on a : $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x\ln x}$ et cela tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Ainsi, par substitution, on obtient :
$$\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x\ln x}.$$
D'où : $x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\underset{+\infty}{\sim}1$ et en repassant au limite, on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=e$.
10. $\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ en utilisant par substitution que : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.
11. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x-x}=-\frac{1}{3}$. On met en facteur x^3 au numérateur et au dénominateur car c'est le terme prépondérant puis on utilise une croissance comparée et le corollaire du théorème des gendarmes pour le cosinus et le sinus.
12. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)=1$. On utilise par substitution l'équivalent usuel de l'exponentielle en 0 puis le théorème sur les monômes de plus haut degré.

Correction 4. Avec des racines.

1. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$ par propriété de la valeur absolue.
2. $\lim_{x\to+\infty}x+2-\sqrt{x^2-3x-1}=\frac{7}{2}$ quantité conjuguée puis on met en facteur le terme prépondérant x.
3. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}=+\infty$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant en facteur le terme prépondérant.
4. $\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}=+\infty$ et $\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}=-\infty$ en mettant sur le même dénominateur qui est $(x+1)^3$.
5. $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ car en simplifiant par la racine en haut et en bas on obtient $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}=1$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine et en le sortant de la racine.
7. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=0$ en utilisant la quantité conjuguée.
8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=2$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme prépondérant.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1} = \frac{1}{3}$ en utilisant la quantité conjuguée puis en mettant en facteur $x-1$ au numérateur et au dénominateur.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{3}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée pour le numérateur et pour le dénominateur.
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant ensuite en facteur le terme prépondérant au dénominateur.
12. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}} = \frac{m}{n}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}$ en faisant apparaître deux taux d'accroissements.

Correction 5. Avec des fonctions trigonométriques.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. Une première méthode consiste à distinguer 2 cas : $x>0$ et $x<0$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$: $-1\leq \sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$.

   - Cas 1 : si $x>0$:
     On a alors comme $x>0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$. Puis comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.
   - Cas 2 : si $x<0$:
     On a alors comme $x<0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1 \Leftrightarrow x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq -x$. Puis comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} -x = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, le théorème des gendarmes assure que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0^-} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$, la limite en 0 existe bien et $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0}$.

   Une autre méthode, pour éviter d'avoir à faire des cas, consiste à encadrer la valeur absolue de l'expression. On a en effet, $\forall x\in\mathbb{R}^\star$:
   $$0\leq\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1\Rightarrow 0\leq\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|.$$
   Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes. On a en effet :
   $$0\leq\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1\Rightarrow 0\leq\left|\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|\sin x|.$$
   Or $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\sin x|=0$, donc par théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}=0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes :
   $$-1\leq\sin(x)\leq 1\Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{x\sin x}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$$
   car $\displaystyle\frac{x}{x^2+1}>0$ car on calcule la limite en $+\infty$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2+1}=0=\lim_{x\to +\infty}-\frac{x}{x^2+1}$ d'après le théorème du monôme de plus haut degré. On obtient alors bien que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}=0$ en utilisant le théorème des gendarmes.

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\cos x}{x^2+1}$ PAS DE LIMITE. Prendre $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi$.

5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2-\ln x} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème des gendarmes.

   On commence par trouver un équivalent du dénominateur : on a $x^2 - \ln x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ car $\dfrac{x^2-\ln x}{x^2} = 1 - \dfrac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par théorème des croissances comparées.
   On encadre ensuite l'équivalent obtenu :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

   De plus $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2}$. On obtient alors bien que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes, puis que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2-\ln x} = 0}$.

6. $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$. Il faut transformer l'expression par les formules trigonométriques pour lever l'indétermination. On a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \times \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos x}.$$

   En reconnaissant des limites usuelles, on obtient le résultat.

7. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ en utilisant les équivalents usuels en 0. On peut bien passer à la racine dans un équivalent car c'est une puissance.

8. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(6x)}{\tan(4x)} = \dfrac{3}{2}$ en utilisant les équivalents usuels en 0.

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ en mettant 2 en facteur et en reconnaissant deux taux d'accroissements.

10. $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2}$. On a

$$\left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x - \sin x}{x}\right)} = e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x}{x}(1-\cos x)\right)} = e^{x^2\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)} \times e^{x^2\ln(1-\cos x)}.$$

   De plus, on sait que : $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. On ne peut pas composer par le logarithme, donc on utilise le raisonnement suivant :

$$x^2\ln(1-\cos x) = x^2\ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} \times \frac{x^2}{2}\right) = x^2\ln\left(\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) + x^2\ln\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

   Or on a $\lim_{x\to0} x^2\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) = 0$, et par croissance comparée, $\lim_{x\to0} x^2\ln\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$. Comme on a aussi en utilisant une limite usuelle et les propriétés sur les produit et composée de limites : $\lim_{x\to0} x^2\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = 0$, on obtient finalement que : $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{\tan x - \sin x}{x}\right)^{x^2} = 1$.

Correction 6. Partie entière :

1. On remarque que, pour $x > 1$, la fonction g est nulle. En effet : $\forall x > 1, \quad 0 < \dfrac{1}{x} < 1$ et donc : $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, la fonction g admet une limite en $+\infty$ qui est nulle.

2. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait que : $\forall x > 1, \quad h(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

3. (a) On utilise ici l'inégalité caractéristique de la partie entière, à savoir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

   - Ainsi, pour $x > 0$, on otient : $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}$. Et ainsi par le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$.
   - Et pour $x < 0$, on obtient que : $\frac{b}{a} < \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$. Et ainsi par le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$.

   Ainsi la limite en 0 existe et vaut $\frac{b}{a}$.

   (b) Par définition de la partie entière, on a, comme $a > 0$: $\forall x \in]0, a[, \quad \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0 \Rightarrow \forall x \in]0, a[, \quad \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0$. Ainsi, la limite en 0^+ existe et vaut 0.

   (c) Par définition de la partie entière, on a, comme $a > 0$: $\forall x \in] - a, 0[, \quad \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = -1 \Rightarrow \forall x \in] - a, 0[, \quad \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = -\frac{b}{x}$. Ainsi : $\lim_{x \to 0^-} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = +\infty$ car $b > 0$.

4. On utilise l'inégalité caractéristique de la partie entière et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

   On distingue alors les cas $x > 0$ et $x < 0$ et on obtient
   - Cas $x > 0$: on a :

$$\begin{array}{lcccl} 1 - x & < & x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \leq & 1 \\ -1 & \leq & -x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & < & x - 1 \\ 0 & \leq & 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & < & x. \end{array}$$

     Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x \to 0^+} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.
   - Cas $x < 0$: on a par le même type de raisonnement que :

$$x < 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 0.$$

     Ainsi toujours par le théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim_{x \to 0^-} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

   Ainsi la limite à gauche et à droite étant la même, on obtient que : $\lim_{x \to 0} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$.

Correction 7. Étude d'une fonction :

1. La fonction f est bien définie si $4x - 6 - |x + 3| \neq 0$. Comme toujours avec la valeur absolue, on doit étudier des cas :
   - Si $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$, on a alors :

$$4x - 6 - |x + 3| = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

     Ainsi, comme on a bien $3 \geq -3$, 3 est une valeur interdite pour f.

- Si $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$, on a alors :

$$4x-6-|x+3|=0 \Leftrightarrow 4x-6-(-x-3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.$$

Or $\frac{3}{5}>-3$ donc $\mathcal{S}=\emptyset$ pour ce cas là.

Ainsi, on obtient que :

$$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}.$$

2. Regardons pour cela ce que vaut f au voisinage de 3, par exemple sur l'intervalle $[2,4]\setminus\{3\}$. Sur cet intervalle, on a : $x+3\geq 0$ et ainsi, on sait déjà que :

$$\forall x\in[2,4]\setminus\{3\},\quad f(x)=\frac{|x-3|-2x}{3(x-3)}.$$

On doit alors étudier deux cas :

- Si $x\in[2,3[$, alors $x-3<0$ et on obtient sur cet intervalle :

$$f(x)=\frac{-x+3-2x}{3(x-3)}=\frac{-3(x-3)}{3(x-3)}=-1.$$

Ainsi, sur cet intervalle f est constante égale à -1 et ainsi : $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=-1$.

- Si $x\in]3,4]$, alors $x-3>0$ et on obtient sur cet intervalle :

$$f(x)=\frac{x-3-2x}{3(x-3)}=\frac{-(x+3)}{3(x-3)}.$$

Ainsi, on obtient par propriétés sur les quotient de limite que : $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$.

La fonction f n'admet pas de limite en 3. Elle n'est pas prolongeable par continuité en 3, elle est prolongeable par continuité à gauche en 3 mais pas à droite en 3.

II Calculs d'équivalents

Correction 8. Je ne donne ici que l'équivalent et les idées de la démonstration. Le calcul de la limite se déduit très facilement à partir de l'équivalent.

QUELQUES RAPPELS :

- On ne somme pas et on ne compose pas des équivalents (mais on peut les mettre à la puissance).
- Dès que vous n'êtes pas sûr, repassez à la limite en divisant et vérifiez que la limite tend bien vers 1.
- Si vous voyez ce que va être l'équivalent mais que vous n'arrivez pas à le montrer par les règles de calcul usuels sur les équivalents, repassez à la limite et montrez que cela tend vers 1.

1. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$. on a $f(x)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{x^2}$ en mettant au même dénominateur.
2. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$. On a $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}$ en mettant au même dénominateur.
3. $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$. On peut supposer que a et b non tous les deux nuls sinon la fonction f est la fonction nulle. On a alors en mettant au même dénominateur que : $f(x)=\frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. Ainsi, si $a+b\neq 0$, alors $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a+b}{x}$. Si $a+b=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ alors $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a}{x^2}$.
4. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x}$. On a $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$ en mettant au même dénominateur.

5. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^4}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^6}$ en mettant au même dénominateur.
6. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^4}$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^4}$ en mettant au même dénominateur.

Correction 9.

1. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{\sqrt{x}}$ (en mettant en facteur $\sqrt{x}$ au dénominateur).
2. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2} = \frac{x-x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$ en utilisant la quantité conjuguée. En mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine au dénominateur, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -x$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{\frac{1+x}{x}}$. On a $f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x}}$. Puis, au voisinage de $+\infty$, on utilise la quantité conjuguée et on obtient $f(t) = \frac{-2x-1}{x(1+x)\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-2x}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$.
4. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2.
5. $f(x) = e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par propriété sur les composée, quotient de limites. On a donc, la limite étant finie et non nulle : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1$.

Correction 10.

1. $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 + x\ln x)$. D'où par croissance comparée, on obtient : $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = \frac{1-e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$. On peut montrer, en repassant à la limite que : $\frac{1}{x^x} = \underset{+\infty}{o}\, 1 - e^{\frac{1}{x}}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{x}}{e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{xe^{-x}}$.
3. $f(x) = \frac{e^{ax}-1}{x-x^2} = \frac{e^{ax}-1}{x(1-x)}$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} a$ par les équivalents usuels. De plus, comme $1 = \underset{+\infty}{o}(e^{ax})$ si $a > 0$, on a si $a > 0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{ax}}{x^2}$. Et si $a < 0$, alors $e^{ax} = \underset{+\infty}{o}(1)$ et alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.
4. $f(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$. Comme $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ par croissance comparée, on a, par substitution : $x^x - 1 \underset{0^+}{\sim} x\ln x$ et ainsi $f(x) \underset{0^+}{\sim} x^{\alpha-1}$.
5. $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln(x^2-x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{\ln(1+x(x-1))}$ donc $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{2(x-1)}{x(x-1)} \underset{1}{\sim} 2$. On utilise une substitution et l'équivalent usuel en 0 du logarithme népérien.
6. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{x+\ln x - 1}$. Comme au voisinage de 0 $x-1$ est négligeable devant $\ln x$, on a : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$. Comme au voisinage de $+\infty$, 1 est négligeable devant e^x et $\ln x$ et -1 sont négligeables devant x, on a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{e^x}}{x}$.
7. $f(x) = x(\ln(x+1) - \ln x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
8. $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$.
9. $f(x) = \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$. On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{x}$.

10. $f(x)=(\ln x)^4-\dfrac{x}{(\ln x)^2}=\dfrac{(\ln x)^6-x}{(\ln x)^2}$. On a $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{-x}{(\ln x)^2}$ car, par croissance comparée, $(\ln x)^6$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$.

Correction 11.

1. $f(x)=\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$. En passant par l'exponentielle, on a : $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x\ln 3}{x\ln 2}\underset{0}{\sim}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.
2. $f(x)=2^{x+1}-2^x=2^x(2-1)=2^x$. On a donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}2^x$.
3. $f(x)=2^{x^2+x}-2^{x^2}=2^{x^2+x}\left(1-\dfrac{1}{2^x}\right)$. On a donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}2^{x^2+x}$.
4. $f(x)=e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=e^{\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Ainsi, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ par propriété sur les composée, quotient de limites. On a donc, la limite étant finie et non nulle : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}1$.
5. $f(x)=(2^x)^x+2^{x^2}+(4^x)^2=(4^x)^2=2\times 2^{x^2}+16^x$ car $(2^x)^x=2^{x^2}$ (repasser à la définition avec l'exponentielle si vous ne voyez pas). Ainsi, en mettant en facteur le terme prépondérant 2^{x^2}, on obtient que : $f(x)=e^{x^2\ln 2}\left(2+e^{-x^2(\ln 2-\frac{\ln 16}{x})}\right)$ et le terme entre parenthèse tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Ainsi, on obtient que : On a donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}2\times 2^{x^2}$.
6. $f(x)=(x+1)^x=e^{x\ln(1+x)}=e^{x\ln x}\times e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=x^x\times e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. On a déjà montré que : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e$ qui est une limite finie et ainsi $e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\underset{+\infty}{\sim}e$. Puis par produit d'équivalents, on obtient que : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}ex^x$.
7. $f(x)=(x-1)^x$. On a par la même méthode que ci-dessus : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}e^{-1}x^x$.
8. $f(x)=(x+1)^x-x^x=e^{x\ln(1+x)}-e^{x\ln x}=x^x\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-1\right)$ en utilisant la même transformation que ci-dessus. Puis, on peut montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-1=e-1$ qui est finie non nulle et ainsi, on a : $e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-1\underset{+\infty}{\sim}e-1$. On a donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}(e-1)x^x$.

III Étude de la continuité de fonctions numériques

Correction 12.

1. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $f:x\mapsto(x^2-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-1\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   - Régularité : La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
2. **Étudier la continuité de la fonction suivante :** $g:x\mapsto\cos(\ln|x|)\ln(1+x)$
   - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $1+x>0$ et $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_g=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
   - Régularité : La fonction g est continue sur $\mathcal{D}_g=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme, composées et produit de fonctions continues.

Correction 13.

1. Étude de la fonction f :
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la continuité de f :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues.

- ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]$ comme fonction polynomiale. En particulier elle est donc continue à gauche en 0 et on a : $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
- ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a déjà que : $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Étude de la limite à droite en 0 : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par propriétés sur les quotient et composée de limites. Ainsi on a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ donc la fonction f est bien continue en 0.

La fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Étude de la fonction g :
   - La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. En effet pour $x \neq 0$, la fonction g est bien définie si et seulement si : $e^{x^2} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ce qui est bien le cas.
   - Étude de la continuité de g :
     - ⋆ La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la continuité en 0 : la fonction g est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a par définition que : $g(0) = 2$. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $g(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{e^{x^2} - 1}$. Avec les équivalents usuels en 0, on a : $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ puis par produit d'équivalents : $\sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2$. De plus par substitution : $e^{x^2} - 1 \underset{0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents : $g(x) \underset{0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Comme $1 \neq g(0)$, la fonction g n'est pas continue en 0.

   La fonction g est ainsi continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Correction 14. La fonction h est définie par : $h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$

Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, elle est continue sur $]-1, 1[$ comme somme et composée de fonctions continues et elle est continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comme fonction polynomiale. Comme cette fonction est définie par deux raccords, on doit étudier la continuité en -1 et en 1 en repassant par la définition, à savoir avec les limites.

- Étude en -1 : La fonction h est continue à gauche en -1 avec $f(-1) = a - b + c = \lim_{x\to -1^-} f(x)$. De plus : $\lim_{x\to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en -1, on doit avoir : $a - b + c = 0$.
- Étude en 1 : La fonction h est continue à droite en 1 avec $f(1) = a + b + c = \lim_{x\to 1^+} f(x)$. De plus : $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en 1, on doit avoir : $a + b + c = 0$.

Ainsi, on doit prendre a, b et c tels que : $\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0. \end{cases}$ La résolution de ce système linéaire donne : $\begin{cases} a - b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= 0 \\ 2b &= 0. \end{cases}$ Ainsi, si on prend par exemple : $b = 0$, $a = 1$ et $c = -1$, ces trois réels permettent que la fonction h soit bien continue en -1 et en 1. Et ainsi elle sera bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction 15.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On distingue deux cas :

- Cas 1 : si $f(x) > g(x)$:
  On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = f(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ car $f(x) - g(x) > 0$. Et ainsi, on a : $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \dfrac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x)$. Donc dans ce cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = f(x)$.
- Cas 1 : si $f(x) \leq g(x)$:
  On a alors d'un côté que : $\max(f(x), g(x)) = g(x)$. De l'autre côté, on a aussi : $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ car $f(x) - g(x) \leq 0$. Et ainsi, on a : $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \dfrac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = g(x)$. Donc dans ce cas aussi, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = g(x)$.

Ainsi dans tous les cas, on a bien que : $\max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.

2. Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et que par hypothèse les fonctions f et g sont bien continues sur $\mathbb{R}$, on a que la fonction $\max(f, g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

IV Existence d'un éventuel prologement par continuité

Correction 16.

1. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : comme la fonction cosinus n'admet pas de limite en l'infini, la fonction f n'admet pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{|x|\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1 + x > 0$ et $e^{2x^2} - 1 \neq 0$, à savoir si et seulement si : $x > -1$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :
       Par les équivalents usuels : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $e^{2x^2} - 1 \underset{0}{\sim} 2x^2$ par substitution et par produit et quotient d'équivalents : $f_2(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{|x|}{2x}$. Ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. Les deux limites ne sont pas égales et ainsi il n'existe pas de limite en 0. Donc la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0. Par contre elle est prolongeable par continuité

à droite en 0 en posant : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Et elle est aussi prolongeable par continuité à gauche en 0 en posant : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en -1 : on a : $\lim_{x\to -1} f_2(x) = -\infty$ par propriété sur les composée, somme, produit et quotient de limites. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

3. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$, $\sqrt{x}-1 > 0$ et $x - 1 > 0$, à savoir $x > 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et somme de fonctions continues.
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on a : $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$. Ainsi $\lim_{x\to 1} f(x) = -\ln 2$ par propriétés sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fonction f est bien prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = -\ln 2$.

   On obtient une fonction que l'on continue de noter f et qui est alors définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si } x > 1 \\ -\ln(2) & \text{si } x = 1. \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[1, +\infty[$ car elle est continue sur $]1, +\infty[$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

4. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^2 - 1 \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme somme, produit et quotient de fonctions continues
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 : par croissance comparée : $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$. Et ainsi par somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
     - ⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 1 : on pose $X = x - 1$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{1+X}{2+X} \times \dfrac{\ln(1+X)}{X}$. Par les équivalents usuels en 0, on a : $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \underset{0}{\sim} 1$. Et ainsi par propriétés sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x>0,\ x\neq 1\\ 0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=1.\end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur $]0,+\infty[\backslash\{1\}$ comme composée et somme de fonctions continues et elle est continue en 0 et en 1 par prolongement.

5. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1-x\neq 0$ et $1-x^2\neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer que $f(x)=\dfrac{-1}{1+x}$ en mettant tout sur le même d/'enominateur et en utilisant le fait que $1-x^2=(1-x)(1+x)$. Ainsi par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$. Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.
     - ⋆ Étude de la limite en 1 : Comme $f(x)=\dfrac{-1}{1+x}$, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2} & \text{si } x\neq 1,\ x\neq -1\\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x=1\end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme sommes et quotients de fonctions continues et elle est continue en 1 par prolongement.

6. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $1+x>0$. Ainsi $\mathcal{D}_f=]-1,+\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f=]-1,+\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : On peut tout de suite remarquer en factorisant le numérateur et en simplifiant avec le dénominateur que $f(x)=\sqrt{1+x}\times(x-3)$. Ainsi par propriété sur les sommes et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1)=0$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}} & \text{si } x>-1,\\ 0 & \text{si } x=-1\end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1,+\infty[$ car elle est continue sur $]-1,+\infty[$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 par prolongement.

7. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$ et $1+x \geq 0$ Par un passage au carré, on obtient que $\sqrt{1+x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : en utilisant les deux équivalents usuels et en les quotientant, on obtient que : $f(x)0_{\sim}\frac{x}{\frac{x}{2}}$. Ainsi $f(x) \underset{0}{\sim} 2$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $[-1, +\infty[$ car elle est continue sur $[-1, +\infty[\setminus\{0, \}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

8. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|}$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en 0 : par l'équivalent usuel du cosinus et par substitution, on a : $1-\cos(\sqrt{x}) \underset{0}{\sim} \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2}$. Ainsi par quotient $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ car $|x| = x$ car on est sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

9. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$:**
   - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$. On fait alors un tableau de signe. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.
   - Étude de la continuité :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
     - ⋆ Étude de la limite en -1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en -1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

- ⋆ Étude de la limite en 0 : on a : $f(x) = x\ln|x^2-1| - x\ln|x|$. Par croissance comparée, on obtient donc que : $\lim\limits_{x\to 0^-} x\ln|x| = 0$. Et ainsi par propriété sur les sommes, composée et produit de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- ⋆ Étude de la limite en 1 : par propriété sur les somme, quotient, composée et produit de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 1 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) & \text{si } x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $]-1,0]\cup]1,+\infty[$ car elle est continue sur $]-1,0[\cup]1,+\infty[$ comme somme, quotient,composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

10. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
    - Étude de la continuité :
      - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues.
      - ⋆ Étude de la limite en 0 : On utilise le théorème des gendarmes : On a : $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x^2$ car $x^2 > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et ainsi d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

    On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient, composée et produit de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

11. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$:**
    - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $2x-1 \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
    - Étude de la continuité :
      - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme sommes et quotient de fonctions continues
      - ⋆ Étude de la limite en $\dfrac{1}{2}$: en factorisant le numérateur, on obtient que : $f(x) = \dfrac{(2x-1)(3x+4)}{2x-1} = 3x+4$. Ainsi par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{11}{2}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$ en posant $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{2}$.

On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{11}{2} & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme somme et quotient de fonctions continues et elle est continue en $\dfrac{1}{2}$ par prolongement.

12. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$:**
    - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x \neq 0$ et $1 + x^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai comme somme de deux termes positifs. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
    - Étude de la continuité :
        - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues
        - ⋆ Étude de la limite en 0 : En utilisant une substitution, on obtient que : $\sqrt{1+x^2}-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. Puis par quotient d'équivalents, on obtient que $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

    On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

13. **Continuité et éventuel prolongement par continuité de la fonction f définie par $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$:**
    - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x > 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composée de fonctions continues.
        - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues
        - ⋆ Étude de la limite en 0 : Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. Ainsi par propriété sur la composition de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

    On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit et composées de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.

Correction 17.

- Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- Limites aux bornes :
    - ⋆ Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x^n}{e^x} \times \dfrac{1}{1-e^{-x}}$. Ainsi par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotient et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$. On pourrait étudier la position relative.

- $\star$ Limite en $-\infty$: tout dépend de la parité de n. Si n est pair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et si n est impair, alors par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. On pourrait faire l'étude des branches infinies.
- $\star$ Limite en 0 : Par les équivalents usuels, on a : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et ainsi on a : $f(x) \underset{0}{\sim} x^{n-1}$. Ainsi, on doit distinguer deux cas selon que $n = 1$ ou $n > 1$:
  - $\circ$ Si $n = 1$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
  - $\circ$ Si $n \geq 2$ alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- Étude de la continuité : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues. De plus elle est continue en 0 par prolongement par continuité. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 18.

- Domaine de définition : la fonction f est bien définie si et seulement si $x^{2n} - 1 \neq 0$, à savoir sur $\mathbb{R}$, on doit donc avoir $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- Étude des limites en -1 et en 1. **Méthode 1 :** on pose le changement de variable $X = x^2$. On a ainsi, lorsque x tend vers 1 ou -1, X qui tend vers 1. On doit donc étudier la limite de $\dfrac{e^X - e}{X^x - 1}$ en 1. On pose alors $Y = X - 1$ pour se ramener à 0. On a :

$$\frac{e^X - e}{X^x - 1} = \frac{e^{Y+1} - e}{(1+Y)^n - 1} = \frac{e(e^Y - 1)}{(1+Y)^n - 1} \underset{Y\to 0}{\sim} \frac{eY}{nY} = \frac{e}{n}.$$

Ainsi, on a $\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{e}{n}$. On peut donc prolonger f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - e}{x^{2n} - 1} & \text{si } x \notin \{-1, 1\} \\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x = 1 \text{ ou } x \end{cases}$

Méthode 2 :

- $\star$ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - e}{x+1} \times \dfrac{x+1}{x^{2n} - 1}$. La fonction $g : x \mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(1) = 2e$. La fonction $h : x \mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en 1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1) = 2n$ car $h'(x) = 2nx^{2n-1}$ et $2n - 1 \geq 1$ car $n \geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on obtient que : $\lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{g'(1)}{h'(1)} = \dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{e}{n}$.
- $\star$ Limite en 1 : on reconnaît par exemple le quotient de deux taux d'accroissement : $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - e}{x-1} \times \dfrac{x-1}{x^{2n} - 1}$. La fonction $g : x \mapsto e^{x^2}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et on a : $g'(-1) = -2e$. La fonction $h : x \mapsto x^{2n}$ est bien dérivable en -1 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et on a : $h'(1) = -2n$ car $h'(x) = 2nx^{2n-1}$ et $2n - 1 \geq 1$ car $n \geq 1$. Ainsi d'après le taux d'accroissement, on

obtient que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{g'(-1)}{h'(-1)} = \dfrac{e}{n}$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = \dfrac{e}{n}$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1} & \text{si } x \notin \{-1,1\}, \\ \dfrac{e}{n} & \text{si } x = 1 \text{ ou } \ x = -1. \end{cases}$

- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ comme composées, sommes et quotient de fonctions continues et elle est continue en -1 et en 1 par prolongement par continuité.

Correction 19. On va montrer que pour $a > -1$, la fonction f est bien prolongeable par continuité en 0.

- La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme quotient, composée et produits de fonctions continues.
- Vérifions que si $a > -1$, alors la fonction f est prolongeable par continuité en 0 :
  - ⋆ En utilisant l'équivalent usuel en 0 : $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et par produit d'équivalents, on sait que : $f(x) \underset{0}{\sim} |x|^a x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi il suffit de calculer la limite de la fonction $g : x \mapsto |x|^a x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
  - ⋆ Comme il y a le terme $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on utilise soit le théorème des gendarmes, soit le corollaire du théorème des gendarmes. Ici on va utiliser le corollaire. On a : $|g(x)| \leq |x|^a \times |x| \Leftrightarrow |g(x)| \leq |x|^{a+1}$. Ainsi, on a :
    - ○ Comme $a+1 > 0$ car par hypothèse $a > -1$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{a+1} = 0$.
    - ○ $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ |g(x)| \leq |x|^{a+1}$.

    Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
  - ⋆ Ainsi, comme les fonctions f et g sont équivalentes en 0, on vient de montrer que pour $a > -1$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

  Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(x) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- Étude de la continuité : la fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme composées et produits de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement par continuité.

V Applications des théorèmes sur la continuité

Correction 20. **Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$:**
Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$ est équivalent à montrer que l'équation $h(x) = 0$ avec $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$. On est dans le cas d'un exercice abstrait (on ne connaît pas l'expression explicite de la fonction) et l'on doit montrer l'existence d'une solution à une équation. On est donc dans le cadre typique du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues car, par hypothèse, on sait que f et g sont continues sur $[0,1]$.
- On a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $h(1) = f(1) - g(1)$. Or $f(1) = g(0)$ et $g(1) = f(0)$. Ainsi on obtient que $h(1) = g(0) - f(0) = -h(0)$. Ainsi $h(0)$ et $h(1)$ sont de signes contraires donc il y en a forcément un positif et un négatif.

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $h(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi $\boxed{\text{l'équation } f(x) = g(x) \text{ possède au moins une solution dans } [0,1].}$

Correction 21.

1. Très classique. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution ce qui est équivalent à la résolution de $f(x) - x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution. Comme on ne veut pas l'unicité, on peut se douter qu'il va falloir utiliser le TVI. On a en effet :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1] : 0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
     On a aussi : $h(1) = f(1)-1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

   Ainsi d'après le TVI, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est un point fixe de f.
2. Très classique. Même type de raisonnement que ci-dessus sauf que l'on veut l'unicité du point fixe, il va donc falloir utiliser le théorème de la bijection. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique ce qui est équivalent à la résolution de $f(x) - x = 0$. On pose ainsi la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$ et on cherche alors à montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution. On a alors :
   - La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues car, par hypothèse la fonction f est continue sur $[0,1]$.
   - La fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Il en est de même pour la fonction $x \mapsto -x$. Ainsi la fonction h est décroissante sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions décroissantes.
   - On a de plus : $h(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1] : 0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(0) \geq 0$ donc $h(0) \geq 0$.
     On a aussi : $h(1) = f(1)-1$. Or comme la fonction f va de $[0,1]$ dans $[0,1]$, on a : $\forall x \in [0,1]$: $0 \leq f(x) \leq 1$. En particulier on a : $f(1) \leq 1 \Leftrightarrow f(1) - 1 \leq 0$ donc $h(1) \leq 0$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $c \in [0,1]$ tel que : $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$. Ainsi c est l'unique point fixe de f.

Correction 22. On suppose que f possède des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ que l'on note respectivement l et l'. Ainsi par définition d'une limite, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0,\ \forall x \geq A : |f(x) - l| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon' > 0, \exists A' > 0,\ \forall x \leq -A' : |f(x) - l'| \leq \varepsilon'.$$

Ainsi si on prend par exemple $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on a l'existence de $A > 0$ et de $A' > 0$ tel que :

- $\forall x \geq A :\ -1 \leq f(x) - l \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l \leq f(x) \leq 1 + l$
- $\forall x \leq -A' :\ -1 \leq f(x) - l' \leq 1 \Leftrightarrow -1 + l' \leq f(x) \leq 1 + l'$.

Ainsi on a donc montré que sur $]-\infty, A']$ et sur $[A, +\infty[$, la fonction f est bien bornée. Il reste donc à étudier l'intervalle $[A', A]$. Mais la fonction f est alors continue sur le segment $[A', A]$, ainsi d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, la fonction f est bornée sur cet intervalle. Ainsi on a bien montré que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction 23. On suppose donc par l'absurde que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \neq g(x)$.

1. On pose la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - g(x)$. Comme pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \neq g(x)$, on obtient que pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$. Ainsi la fonction h ne s'annule pas sur $[0,1]$. On peut donc appliquer le corollaire du TVI. En effet on a :

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues.
- Pour tout $x \in [0,1]$: $h(x) \neq 0$.

Ainsi d'après le corollaire du TVI, on sait que la fonction h garde un signe constant sur $[0,1]$: soit h est toujours strictement positive sur $[0,1]$, soit h est toujours strictement négative sur $[0,1]$. On peut donc supposer par exemple que h reste toujours strictement positive sur $[0,1]$ (le même type de raisonnement donnerait le même résultat si h reste toujours strictement négative). Ainsi pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) > g(x)$.

2. - La fonction h est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le théorème sur les fonctions continues sur un segment, on sait que h est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, il existe un minimum de h sur $[0,1]$ que l'on note m. Ainsi on a par définition d'un minimum :
$$\forall x \in [0,1],\ h(x) \geq m \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq g(x) + m.$$
   - Il reste donc à montrer que $m > 0$. Comme m est le minimum de h sur $[0,1]$, on sait qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que : $m = h(c)$. Or on a supposé que h reste toujours strictement positive. Ainsi $m = h(c) > 0$.

   Ainsi on a bien montré qu'il existe $m > 0$, tel que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \geq g(x) + m$.
3. - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in [0,1],\ f^n(x) \geq g^n(x) + mn$.
   - Initialisation pour $n = 1$: d'un côté, on a : pour tout $x \in [0,1]$: $f(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in [0,1]$: $g(x) + m$. D'après la question précédente on sait que pour tout $x \in [0,1]$: $f(x) \geq g(x) + m$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a montré à la question précédente que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f(x) \geq g(x) + m$. En prenant $x = f^n(x) \in [0,1]$, on obtient que : $f(f^n(x)) \geq g(f^n(x)) + m$. Or on sait aussi que $f \circ g = g \circ f$ donc par une récurrence imédiate on pourrait montrer que $g \circ f^n = f^n \circ g$. Ainsi, on a pour tout $x \in [0,1]$: $g(f^n(x)) + m = f^n(g(x)) + m$. Ainsi, on vient de montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x)) + m$. Mais par hypothèse de récurrence, on sait aussi que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $f^n(x) \geq g^n(x) + nm$. Ainsi en prenant $x = g(x) \in [0,1]$, on a : $f^n(g(x)) \geq g^n(g(x)) + nm$, à savoir : $f^n(g(x)) \geq g^{n+1}(x) + nm$. Finalement, on a donc montré que pour tout $x \in [0,1]$: $f^{n+1}(x) \geq f^n(g(x)) + m \geq g^{n+1}(x) + nm + m$ donc on a bien : $f^{n+1}(x) \geq g^{n+1}(x) + (n+1)m$ et ceci pour tout $x \in [0,1]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
4. On fixe alors $x \in [0,1]$ et on regarde ce que l'on obtient si on fait tendre n vers $+\infty$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g^n(x) + nm = nm\left(1 + \dfrac{g^n(x)}{nm}\right)$. Or la suite $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle est toujours comprise entre 0 et 1 et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et comme $m > 0$, on a : $0 \leq g^n(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{g^n(x)}{nm} \leq \dfrac{1}{nm}$. Ainsi en utilisant le théorème des gendarmes, on montre que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{g^n(x)}{nm} = 0$. Ainsi par propiétés sur les somme et produit de limites et comme $m > 0$, on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^n(x) + nm = +\infty$. Ainsi, on a
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
   - $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^n(x) + nm = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de minoration, on sait que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$. Absurde car on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq f^n(x) \leq 1$. Ainsi on a bien aboutit à une contradiction et donc il existe bien $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Correction 24.

1. - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = g(x)$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Mais si on pose $X = \frac{x}{2n}$, on sait aussi par hypothèse sur g que : $g(X) = g\left(\frac{X}{2}\right)$, à savoir : $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(\frac{x}{2^n} \times \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$. On vient donc de montrer que : $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On sait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Or on a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et par propriété sur le produit de limites. On a donc
   - $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$
   - La fonction g est continue en 0 par hypothèse.

   Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on obtient que : $\lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(0)$. Comme on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et que $\lim_{n \to +\infty} g(x) = g(x)$ car $g(x)$ ne dépend pas de n, on a par unicité de la limite que : $g(x) = g(0)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on vient bien de montrer que g est constante tout le temps égale à $g(0)$.

Correction 25. On fait ici un raisonnement par analyse-synthèse. **Analyse :** On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie la condition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. On a : $f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.
2. (a) Montrons que f est une fonction impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$ par hypothèse sur f. Mais $f(x+(-x)) = f(0) = 0$ d'après la question précédente. Ainsi on vient de montrer que $f(x) = -f(-x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Ainsi la fonction f est bien une fonction impaire.

   (b) Montrons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(nx) = nf(x)$.
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a : $f(0 \times x) = f(0) = 0$ et de l'autre côté, on a : $0 \times f(x) = 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x)$ par hypothèse sur la fonction f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait que : $f(nx) = nf(x)$. Ainsi, on obtient que : $f((n+1)x) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.

   (c) Soit alors $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a ainsi $-n \in \mathbb{N}$ et on vient donc de démontrer que : $f(-nx) = -nf(x)$ car $-n \in \mathbb{N}$ et en appliquant le résultat de la récurrence ci-dessus. En utilisant alors de plus le fait que la fonction f est impaire, on sait alors que : $f(nx) = f(-(-nx)) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x)$ ce qui est le résultat voulu.

   Ainsi, on vient bien de montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(nx) = nf(x)$.
3. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$ fixés. On calcule $f\left(q \times \frac{p}{q}\right)$ de deux façons différentes. En effet, on a d'un côté : $f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f(p) = f(p \times 1) = pf(1) = pa$ car $p \in \mathbb{Z}$ et en appliquant la

question précédente avec $x = 1$. Mais d'un autre côté, on a aussi : $f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$ en appliquant cette fois ci la question précédente avec $x = \frac{p}{q}$. Ainsi, on obtient l'égalité suivante : $pa = qf\left(\frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$ ce qui est le résultat attendu.

4. On utilise alors le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait donc qu'il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que : $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$. On peut alors remarquer deux choses :
   - Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(r_n) = r_n a$ d'après la question précédente car $r_n \in \mathbb{Q}$, on a par propriété sur le produit de limites : $\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = xa$.
   - De plus, on a aussi :
     - ⋆ $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$
     - ⋆ f est continue en x car elle est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par hypothèse de départ.

     Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on sait que : $\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$.

   Ainsi par unicité de la limite, on obtient que : $f(x) = ax$.
5. On a donc ainsi montrer dans l'analyse que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ alors la fonction f est une fonction linéaire.
   Synthèse : comme toutes les fonctions linéaires, à savoir toutes les fonctions de type $f : x \mapsto ax$ sont bien continues et vérifient bien que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+y) = f(x)+f(y)$, on obtient : l'ensemble des fonctions f cherchées est l'ensemble des fonctions linéaires.