Table des matières

Chapitre 15 : limites et continuité

I Définition de la limite d'une fonction

La définition de la limite pour les fonctions est analogue à celle que l'on a vu pour les suites. Cependant, contrairement aux suites pour lesquelles on ne s'intéresse qu'à la limite quand n tend vers $+\infty$, la situation est un peu plus compliquée dans le cas des fonctions. En effet, puisque l'on peut considérer aussi bien des limites en l'infini qu'en des points de $\mathbb{R}$ (et vers lesquels on peut s'approcher de différentes façons : par la droite, par la gauche, des deux côtés), plusieurs cas de figures et différentes notions doivent être introduites.
Intuitivement, une fonction f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ lorsque $f(x)$ s'approche de ℓ quand x s'approche de x_0, ce qui se traduit différemment selon que x_0 et ℓ sont réels ou infinis.

Il y a trois niveaux de compréhension - a priori sans ordre de difficultés ni de relation :

— Comprendre intuitivement la notion de limite. (C'est vraiment important)
— Comprendre avec les quantificateurs la notion de limite. (On vous demandera pas trop de savoir le faire)
— Savoir faire des calculs de limites. (C'est le but des TD et c'est ce qu'on vous demandera pratiquement de savoir faire)

I. 1 Definitions

Définition 1. Limite finie en l'infini :

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a une limite finie en $+\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

  ....

  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f a une limite finie en $-\infty$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

  ....

  Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Remarque. Interprétation graphique : ....

Exemples. La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+3}{(2x+1)(x-2)}$ ....

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ ....

Définition 2. Limite infinie en l'infini :

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ une fonction.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
  - $\star$ On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

    ....

    On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Intuitivement, f tend vers ℓ en x_0 signifie que pour toute bande horizontale de taille 2ε (aussi petite soit-elle) centrée autour de ℓ, on peut trouver un intervalle de taille 2δ centré autour de x_0 tel que

Dans toute cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Définition 3. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 sur I si :

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.
- On dit que f admet une limite finie en x_0 s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^\star$ et $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} \dfrac{\sin x}{x} = \ldots$.

Définition 4. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 sur $I \setminus \{x_0\}$ si :

  ....

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 sur $I \setminus \{x_0\}$ si :

  ....

  On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque. Interprétation graphique : ....

Exercice 5. Étude et représentation graphique de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-1|}$.

I. 2 Limite à droite et à gauche en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

On va maintenant étendre cette notion de limite au cas où $x_0 \in I$ et f n'est définie que sur $I \setminus \{x_0\}$ (donc non définie en x_0 mais uniquement autour de x_0).

Définition 6. Soient $x_0 \in I$ et $f : D_f \to R$ une fonction et x_0 une borne de D_f. On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 avec $x \neq x_0$ si :
On note dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to x_0, x \neq x_0}{\longrightarrow} \ell$.

On va maintenant définir les notions de limite à droite et de limite à gauche en un point.

Définition 7. Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Limite à droite : f admet une limite ℓ à droite en x_0 lorsque

  ....

  On la note ....
- Limite à gauche : f admet une limite ℓ à gauche en x_0 lorsque

  ....

  On la note ....

Remarque. Dire que f admet une limite à droite en x_0 consiste à étudier la limite uniquement lorsque l'on se rapproche de x_0 par valeurs strictement supérieures. De même, dire que f admet une limite à gauche en x_0 consiste à étudier la limite uniquement lorsque l'on se rapproche de x_0 par valeurs strictement inférieures.

Lorsque la fonction f est définie de manières différentes de part et d'autre de x_0, on s'intéresse aux limites à droite et à gauche pour étudier la limite de f en x_0. Plus précisement, on a le résultat suivant très important en pratique :

Proposition 8. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si f admet une limite l (finie ou infinie) en x_0, alors ....
- Pour la réciproque, on doit étudier deux cas selon que f est définie ou non en x_0 :
  - ⋆ **Cas 1 : si $\mathbf{x_0} \notin \mathbf{I}$** :
    Si .... alors f admet une limite en x_0 et ....
  - ⋆ **Cas 2 : si $\mathbf{x_0} \in \mathbf{I}$** :
    Si .... alors f admet une limite en x_0 et : ....

Remarques.
- Cette proposition est en fait intuitive : une fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si elle tend vers ℓ lorsque l'on se rapproche de part et d'autre de x_0.
- Cette proposition est aussi utilisée pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point x_0 : il suffit de montrer que les limites à gauche et à droite en x_0 ne sont pas les mêmes ou qu'elles ne sont pas égales à $f(x_0)$ lorsque la fonction f est définie en x_0.

Exercice 9.
1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ a-t-elle une limite en 1 ?
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ a-t-elle une limite en 2 ?
3. La fonction partie entière a-t-elle une limite en 2 ?
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. A quelle condition sur α cette fonction admet-elle une limite en 0 ?
5. On définit h sur $\mathbb{R}^\star$ par : $h(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. La fonction h a-t-elle une limite en 0 ?
6. On définit g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - \sin x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. La fonction g a-t-elle une limite en 0 ?

I. 3 Opérations sur les limites

Dans toute cette sous-partie, x_0 désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Pour calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, on peut utiliser les propriétés sur les sommes, produits, et quotients de limites.

On rappelle les formes indéterminées pour lesquelles on ne peut pas conclure :

Proposition 10. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément de I ou une borne (finie ou infinie) de I, y_0 un élément de J ou une borne (finie ou infinie) de J et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) &= y_0 \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) &= \ell \end{cases} \implies \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ldots.$$

Exercice 11. Calculs de limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} + \ln x + x^{-2} - 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{2}} - \ln x + 4e^x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x - \sqrt{x^2+3x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x|e^{-x} - 2x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} + 4$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} + \dfrac{1}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x\ln x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4-e^{-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sqrt[3]{1+x^3}$
13. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{x^2+x} - e^x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|x| + 1}{e^x + 1}$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Toujours commencer par essayer de calculer une limite en utilisant les propriétés sur les sommes, produits, quotients et composées de limites usuelles.

I. 4 Limites et inégalités

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et x_0 un élément de I ou une borne (finie ou infinie) de I. Ainsi, soit $x_0 \in \mathbb{R}$, soit $x_0 = \pm\infty$.

Théorème 12. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

Penser au théorème des gendarmes pour les calculs de limites comportant :

- Les fonctions cosinus et sinus : $\cos(X)$, $\sin(X)$ avec X qui tend vers $\pm\infty$.
- La fonction partie entière.

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

On a un résultat analogue à celui des suites monotones (mais qui sert beaucoup moins en pratique).

Théorème 14. Soit f une fonction définie sur $I =]a,b[$ avec $a < b$ et éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$.

Si .... alors ....

Plus précisement, si, par exemple, f est croissante sur I, on a :

- ⋆ Si f est majorée sur I alors la limite de f en b est finie et elle est égale à $\sup\limits_{x\in I} f(x)$.
  ⋆ Si f n'est pas majorée sur I, alors ....
- ⋆ Si f est minorée sur I alors la limite de f en a est finie et elle est égale à $\inf\limits_{x\in I} f(x)$.
  ⋆ Si f n'est pas minorée sur I, alors ....

On peut énoncer un résultat analogue avec f décroissante sur I.

Théorème 15. Soient f et g deux fonctions définies sur I.

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 16. Calculer les limites de la fonction partie entière en $\pm\infty$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{\cos x}$.

Théorème 17. Soient f et g deux fonctions définies sur I et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \Longrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) < g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \Longrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

⚠ Quand on passe à la limite dans une inégalité, les inégalités ....

⚠ On ne peut passer à la limite dans une inégalité que lorsque l'on sait que les limites existent.

Proposition 18. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ finie.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\ell > 0$ alors :

....

Remarque. Précisons la notion de l'existence d'un voisinage de x_0 :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, un voisinage est de la forme ....
- Si $x_0 = +\infty$, un voisinage est de la forme ....
- Si $x_0 = -\infty$, un voisinage est de la forme ....

II Fonctions équivalentes

La notion d'équivalence définit de manière rigoureuse la notion « deux fonctions f et g se comportent de la même façon au voisinage d'un point ».
Définition et caractérisation

Définition 19. Soient f et g deux fonctions définies sur $I \setminus \{x_0\}$ et ne s'annulant pas au voisinage de x_0.

- On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si
- On note dans ce cas .... ou ....

⚠ Il est nécessaire de préciser sous le signe $\sim$ en quel point on se place.

⚠ $f \underset{x_0}{\sim} 0$ n'a pas de sens ! Donc une fonction équivalente à 0 sera toujours un résultat FAUX.

Exercice 20. Donner et démontrer l'équivalent des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x + \ln x$ en $+\infty$
2. $x \mapsto e^x - 1$ en $+\infty$
3. $x \mapsto x + x^2$ en $+\infty$
4. $x \mapsto x^2 - e^x + 4\ln x$ en $+\infty$
5. $x \mapsto x + \ln x$ en 0
6. $x \mapsto x + x^2$ en 0
7. $x \mapsto x^2 - e^x$ en 0

Exemples importants : équivalents usuels

Proposition 21. Équivalents usuels en 0 :

- $\sin x \underset{0}{\sim}$
- $\cos x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $\tan x \underset{0}{\sim}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

Exercice 22. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x(x-2)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin x}$.

Lien avec les limites

Un des intérêts des équivalents est d'obtenir des limites lorsqu'il y a des formes indéterminées.

Proposition 23. Si f et g sont deux fonctions équivalentes en x_0, alors elles ont le même comportement en x_0, à savoir :

- f tend vers $l \in \mathbb{R}$ en x_0 $\Leftrightarrow$ ....
- f tend vers $\pm\infty$ en x_0 $\Leftrightarrow$, ...
- f n'a pas de limite en x_0 $\Leftrightarrow$ ....

Proposition 24. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$. On a : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si $f \underset{x_0}{\sim}$......

⚠ Faux si $\ell = 0$ ou si la limite est $\pm\infty$.

Propriétés des équivalents

Proposition 25. Soient $f,\ g,\ h$ et k des fonctions définies sur I.

- Produit : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors ....
- Quotient : si h et k ne s'annulent pas sur un voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors ....
- Puissances :
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors ....
  - ⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f et g sont strictement positives sur un voisinage de x_0 et si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors ....

⚠ On n'additionne JAMAIS des équivalents :

⚠ On ne compose JAMAIS des équivalents :

En pratique, si l'on veut composer par une fonction, il faut vérifier que cela marche en revenant à la définition avec les limites.

Proposition 26. Substitution : Soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient $f,\ g$ deux fonctions définies sur I et soit u une fonction définie sur un voisinage de t_0 et telle que $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = x_0$. Alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \Longrightarrow \quad f \circ u \underset{t_0}{\sim} g \circ u.$$

⚠ Il ne faut pas confondre les composés d'équivalents qui sont à proscrire et la substitution qui, elle, est autorisée.

Exercice 27. Déterminer un équivalent simple puis calculer la limite des expressions suivantes :

1. $x^2 - x\sqrt{x} - x\ln x$ en $+\infty$
2. $\dfrac{x^2 - x\sqrt{x} - x\ln x}{\ln x + e^x - x}$ en $+\infty$
3. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$
4. $x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ en $+\infty$
5. $\dfrac{\tan^3(x)}{1 - \cos x}$ en 0
6. $\dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$ en 0
7. $\dfrac{\sin(x^2 + 3x)}{x}$ en 0
8. $\dfrac{e^x - e}{\sin(x-1)}$ en 1
9. $\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
10. $\ln(1 + \sin x)$ en 0

III Continuité en un point

III. 1 *Définition de la continuité en un point :*

Définition 28. Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que la fonction f est continue en x_0 si

Exercice 29.

1. Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
2. Étudier la continuité en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0,\ x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Lorsque la fonction se comporte de façon différente à droite et à gauche de $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on doit regarder la continuité à droite et à gauche en x_0.

Exemple type : les fonctions définies par des raccords.

Définition 30. Soit f une fonction définie en x_0. On suppose que x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$.

- On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si ....
- On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si ....

Exercice 31. Étudier la continuité en 0 à droite et à gauche de la fonction partie entière.

Proposition 32. Soit f une fonction définie en x_0, où x_0 n'est pas une extrémité de $\mathcal{D}_f$. On a alors :

f continue en $x_0 \iff$ .... $\iff$ ....

Exemple. Étudier la continuité en 0 de la fonction partie entière.

Exercice 33. Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

III. 2 Continuité sur un intervalle

Définition 34. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

- Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue sur I si ....
- L'ensemble des fonctions continues sur I est noté ....ou ....
- On dit que f ....

En repassant par la définition, on peut ainsi démontrer la continuité des fonctions usuelles suivantes :

....

....

Proposition 35. Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}(I)$ alors

- ....
- ....
- ....
- ....

Proposition 36. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{C}(I)$ et $g \in \mathcal{C}(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors ....

Méthode pour montrer la continuité sur un intervalle :

Par somme, produit, composée, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles.

Exercice 37. Étudier la continuité sur $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$
3. $f(x) = \ln\left(e^{-x^4} + 3\right)$
4. $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{\tan(\pi x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

III. 3 Prolongement par continuité

La fonction f est définie au voisinage de x_0 MAIS PAS en x_0 : $\boxed{x_0 \notin \mathcal{D}_f}$. On calcule donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour savoir si on peut prolonger par continuité la fonction en x_0.

Définition 38. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f telle que : $\begin{cases} \boxed{f \text{ non définie en } x_0} \\ f \text{ admet une limite finie en } x_0 \text{ notée } l. \end{cases}$
Alors la fonction $\tilde{f}$ définie par :
s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0. Par abus de notation, on la note encore ....

Lorsque la limite en x_0 n'existe pas, cela vient le plus souvent du fait que les limites en x_0 à droite et à gauche ne sont pas les mêmes. On peut alors regarder si la fonction est prolongeable par continuité à droite ou à gauche.

Proposition 39. Existence du prolongement par continuité à droite ou à gauche :
Soit f une fonction non définie en x_0.

- Prolongement par continuité à droite :
  - $\star$ f admet un prolongement par continuité à droite en x_0 si ....
  - $\star$ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :
- Prolongement par continuité à gauche :
  - $\star$ f admet un prolongement par continuité à gauche en x_0 si ....
  - $\star$ Dans ce cas, le prolongement $\tilde{f}$ est défini par :

Exercice 40. Étudier les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x}{-x^2 - x + 2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

IV Théorèmes sur les fonctions continues définies sur un intervalle

Proposition 41. Soient f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers ℓ
- f est continue en ℓ

Alors $f(u_n)$ tends vers $f(\ell)$

Exercice 42. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ln(2 + x)$.

Le théorème

Théorème 43. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Si on a :

- ....
- ....

alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$: ....

Exercice 44.
1. Montrer que toute fonction polynôme de degré 3 a au moins une racine réelle sur $\mathbb{R}$. De même montrer que toute fonction polynôme de degré impair a au moins une racine réelle sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'elle admet un point fixe.
3. Soient deux fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) > g(0)$ et $f(1) < g(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = g(c)$.

Théorème de la bijection et fonction réciproque

Théorème 45. Soient $f : I \to \mathbb{R}$. Si on a :

- ....
- ....

alors :

- ....
- ....
- ....

Exercice 46.
1. Étude de la bijectivité de la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2^x$.
2. Étude de la bijectivité de la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{x+2}{x-2}$. Donner ensuite l'expression de f^{-1}.

Définition 47. Définition d'un segment de $\mathbb{R}$:

Un segment de $\mathbb{R}$ est ....

Exemples.
- Exemples de segment de $\mathbb{R}$: ....
- Exemples d'intervalles de $\mathbb{R}$ non segment : ....

Théorème 48. Théorème d'une fonction continue sur un segment :

- ....
  ....
- Plus précisement, si f est continue sur $[a, b]$ alors :

Exercice 49. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^{12} - 2x^5 + 3x^3 - 1$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.