DS 7

Durée 3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^2 \sin x^2}{\sqrt{1-x^2}-1} \qquad 2)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} \qquad 3)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$$

Exercice 2. Calculer la limite de S_n quand $n \to +\infty$ où S_n est définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^2}$$

Exercice 3. Soit $a \in]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$
   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :
   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
   On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties
3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$
   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$
   .
   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Exercice 4. On dispose d'une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges. On fait des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

— Si la boule tirée est de couleur blanche, on la remet et on ajoute une boule blanche

— Si la boule tirée est de couleur rouge, on la remet et on ajoute une boule rouge.

On appelle B_i l'événement "tirer une boule blanche au i-iéme tirage" et on note $p_i = P(B_i)$.

1. Calculer p_1 en fonction de b et r.
2. Montrer que $p_2 = \frac{b}{b+r}$.
3. On a tiré une boule blanche au deuxième tirage. Donner alors la probabilité que l'on ait tiré une boule blanche au premier tirage en fonction de b et r.
4. On appelle E_n l'événément

   E_n : " On tire que des boules blanches sur les n premiers tirages "

   et F_n l'événement

   F_n : " On tire pour la première fois une boule rouge au n-ième tirage"

   (a) Exprimer E_n à l'aide des événements $(B_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$

   (b) Exprimer F_n à l'aide de E_{n-1} et B_n
5. Pour tout $k \geq 2$ calculer $P_{E_{k-1}}(B_k)$.
6. Calculer $P(E_n)$ en fonction de b, r et n puis $P(F_n)$.
7. On souhaite modéliser informatiquement cette expérience. On va utiliser la lettre 'B' pour désigner les boules blanches et 'R' pour les rouges.

   (a) Créer une fonction `urne` qui prend en paramètres le nombre de boules blanches et rouges, et retourne une liste correspondant à l'urne initiale. (Cette liste n'a pas à être "mélangée")

   (b) Créer une fonction `tirage` qui prend en argument une liste correspondant à une urne, modélise le tirage d'une boule alétoirement dans cette urne, affiche la couleur de la boule tirée et retourne une liste correspondant à l'urne aprés l'ajout de la boule de la couleur tirée.

   (c) Créer une fonction `compte` qui prend une liste correspondant à une urne et retourne le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.

   (d) Créer une fonction `expérience` qui prend en argument le nombre de boules blanches et rouges et N le nombre de tirages effectués et retourne le nombre de boules blanches dans l'urne aprés N tirages.