TD 18 : DL

I Négligeabilité

Exercice 1. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x),\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = 2,\ f_5(x) = \ln(x),\ f_6(x) = \sqrt{x}\ln x,\ f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 2. Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en 0 :

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x^2)-1,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = x\sqrt{x},\ f_5(x) = \ln(x),\ f_6(x) = \sqrt{x}\ln x,\ f_7(x) = \ln(x+1).$$

Exercice 3. Soit f et g deux fonctions. Montrer que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$$

Exercice 4. Soit $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

II Calculs de développements limités

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

1. $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \exp(\sin x)$ à l'ordre 4
3. $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2
4. $f(x) = \cos\sqrt{x}$ à l'ordre 5
5. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1
6. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
7. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2
8. $f(x) = \sin x - x\cos x$ à l'ordre 8
9. $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2
10. $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
11. $f(x) = \tan^2 x$ à l'ordre 6
12. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
13. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3
14. $f(x) = \ln(1+\cos(2x))$ à l'ordre 4
15. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3
16. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4
17. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x}{\tan x}\right)$ à l'ordre 4
18. $f(x) = (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

Exercice 6. Déterminer le développement limité à l'ordre n donné de la fonction f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x)=\sqrt{x}$ au voisinage de $x_0=\dfrac{1}{4}$ à l'ordre $n=5$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre $n=5$

3. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $x_0=3$ à l'ordre $n=4$

4. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre $n=3$

5. $f(x)=x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre $n=3$

6. $f(x)=e^{x-1}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre n quelconque.

7. $f(x)=\dfrac{x^n\ln x}{x^2-1}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre 2

III Recherche de limites et d'équivalents

Exercice 7. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

1. $x\mapsto \dfrac{e^x-\ln(1+x)-\cos x}{\sin x - x}$ en $a=0$
2. $x\mapsto \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ en $a=0$
3. $x\mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x+\cos x-\sin x-2}$ en $a=0$
4. $x\mapsto x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-x^2$ en $a=+\infty$
5. $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ en $a=0$
6. $x\mapsto \dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$ en $a=1$
7. $x\mapsto \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $a=+\infty$
8. $x\mapsto (x^6+x^2+1)^{\frac{1}{6}}-(x^4+1)^{\frac{1}{4}}$ en $a=+\infty$
9. $x\mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a=+\infty$
10. $x\mapsto \dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-\tan x}$ en $a=0$
11. $x\mapsto (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ en $a=\dfrac{1}{2}$
12. $x\mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right]\ln x$ en $a=+\infty$
13. $x\mapsto x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a=+\infty$
14. $x\mapsto \dfrac{\tan x-1}{\sin(2x)-1}$ en $a=\dfrac{\pi}{4}$
15. $x\mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a=1$
16. $x\mapsto \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}$ en $a=1$

Exercice 8. Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x)=\dfrac{2}{\sin x}-\dfrac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a=0$
2. $f(x)=\sin(2x)-2\sin x$ au voisinage de $a=0$
3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a=0$
4. $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)-\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $a=+\infty$
5. $f(x)=(e+x)^e-e^{e+x}$ au voisinage de $a=0$
6. $f(x)=\sin(\ln(1+x))-\ln(1+\sin x)$ au voisinage de $a=0$

IV Étude locale de fonctions

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu). On étudiera aussi la position locale de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ (s'il y a lieu).

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x}$
3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
5. $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

Exercice 10. Étudier la régularité de f, les variations de f, l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 0 et l'existence d'asymptotes pour $\mathcal{C}_f$ pour f définie par :

1. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$
2. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (ne pas étudier les variations).

V Développement limité d'une fonction réciproque

Exercice 11. Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \arctan x + e^x - 1.$$

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 12.
1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1}.

VI Développement limité et régularité

Exercice 13. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

Exercice 14. Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases} \cdot$$

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1.
   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x réel.

Exercice 15. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x + x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$.