TD 19 : Espace vectoriel

I Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\}$
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\}$
3. $C = \{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 0\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + z = 1\}$
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 5y = 2y + z = 0\}$
4. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad y = x^3\}$
5. $E = \{(2z, -z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3. L'ensemble F suivant est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\}.$$

II Sous-espaces vectoriels engendrés. Familles génératrices

Exercice 4. Trouver une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z = 0\}$
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad ax + by + z = 0\}$

Exercice 5. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.

1. $E = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,2,2)$ et $v = (2,1,3)$.
2. $E = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,4,1,1)$ et $v = (-1,2,2,1)$.
3. $E = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a), \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 6. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 3y + 2z = 0\}$ et $u = (1,3,4)$ et $v = (3,-1,-3)$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que (u,v) est une famille génératrice de E.

Exercice 7. Dans $\mathbb{K}^3$, on considère $u = (2,-4,7)$ et $v = (-1,2,-3)$. Peut-on déterminer a de sorte que $w \in \text{Vect}(u,v)$ dans chacun des 3 cas suivants :

1. $w = (-1, a, 3)$
2. $w = (-1, 2, a)$
3. $w = (-1, -1, a)$

Exercice 8.

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u = (1,3,-1)$, $v = (1,-3,2)$, $u' = (1,9,-4)$ et $v' = (-2,-18,8)$. Comparer pour l'inclusion les sev suivants : $\text{Vect}(u,v)$ et $\text{Vect}(u',v')$
2. Recommencer pour $u = (1,2,1)$, $v = (1,-3,2)$, $u' = (0,5,-1)$ et $v' = (3,1,4)$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $\text{Vect}(v,w)$ avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$.

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_i) engendre E :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (1, -1, -2)$, $u_2 = (7, 10, 3)$ et $u_3 = (3, -4, -7)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, 1, 0)$

Exercice 11. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\right\}.$$

Trouver une famille génératrice de $F \cap G$.

III Familles libres

Exercice 12. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

1. $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
2. $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
3. $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
4. $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$

Exercice 13. Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre dans $\mathbb{R}^4$?

$$u_1 = (1, 1, 0, 0) \quad u_2 = (1, m, 1, 0) \quad u_3 = (1, 0, m, 1) \quad u_4 = (1, 0, 0, m)$$

Exercice 14. 1. La famille $((6, 4, 0), (1, 6, 2))$ est-elle libre ?

2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la famille $((a, a - 6, 4), (1, -a, 2))$ est-elle libre ?

Exercice 15. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ de sorte que la famille de vecteurs (u, v, w) de $\mathbb{R}^4$ soit liée avec

$$u = (3, 1, -4, 6) \qquad v = (1, 1, 4, 4) \qquad w = (1, 0, -4, m).$$

Quelle est la relation de liaison ?

IV Base, Dimension

Exercice 16. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F et sa dimension.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - y + 4z = 0\right\}$
3. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x + 2y - 2z, -x + 3y - z, x + 7y - 5z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$
4. $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad 2xy + z - t = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y - at = 0\right\}$ avec a un paramètre réel.

Exercice 17. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si oui, on les complètera en une base de $\mathbb{R}^3$ et si non, on donnera la relation de liaison. Sont-elle génératrices de $\mathbb{R}^3$? Si oui, on en extraira une base de $\mathbb{R}^3$, si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonction des vecteurs de la famille.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2, 4, 3), (1, 5, 7))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((9, 3, -7), (1, 8, 8), (5, -5, 1))$

4. $\mathcal{F}_4 = ((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$

Exercice 18. Soit la famille (v_1,v_2,v_3) avec $v_1=(1,7,2)$, $v_2=(3,5,9)$ et $v_3=(2,4,6)$. Montrer que (v_1,v_2,v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice des coordonnées de $u=(0,-2,-1)$ dans cette base ?

Exercice 19. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u,v) avec $u=(1,-1,2)$ et $v=(2,1,3)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de E
2. Vérifier que le vecteur $(3,3,4)$ appartient bien à E et déterminer ses coordonnées dans la base (u,v).

Exercice 20. On définit les vecteurs $v_1=(1,1,-1)$, $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(1,1,0)$. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer le vecteur $w=(1,2,1)$ dans cette base.

Exercice 21. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$$F=\left\{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5,\quad x+y+z=0 \text{ et } x+u-t=0\right\} \qquad G=\left\{(x,y,z,t,u)\in\mathbb{R}^5,\quad x+y-z+t=0\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^5$, en donner une base et la dimension. Etudier $F\cap G$.

Exercice 22. On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. On considère les parties suivantes de E :

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3,\quad x+iy-z=0\right\} \qquad G=\left\{(a+ib,a-ib,a+b),\ (a,b)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sev de E. Donner une base pour chacun de ces sev.
2. Donner une équation cartésienne de G.
3. Donner un système d'équations cartésiennes et une base pour $H=F\cap G$.
4. Donner une base de E composé d'un vecteur de F, d'un vecteur de G et d'un vecteur quelconque.

Exercice 23. Donner la dimension de $F=\operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ avec $v_1=(1,0,1,0,1)$, $v_2=(-1,-2,0,1,1)$, $v_3=(0,1,0,0,-2)$ et $v_4=(-1,-5,1,2,5)$.

V Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire

Exercice 24. Pour chaque famille de vecteurs, donner le rang et une base du sev engendré :

1. $E=\mathbb{R}^4$ et $u=(1,1,0,0),\ v=(3,-1,3,-1),\ w=(0,1,0,1),\ x=(-1,5,-1,5)$
2. $E=\mathbb{C}^2$ et $u=(1,i),\ v=(i,-1)$
3. $E=\mathbb{R}^4$ et $u=(1,0,0,-1),\ v=(2,1,0,1),\ w=(1,-1,1,-1),\ x=(7,2,0,1),\ y=(-2,-3,1,0)$.

Exercice 25. Déterminer le rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) avec $u_1=(\lambda,1,1,1)$, $u_2=(1,\lambda,1,1)$, $u_3=(1,1,\lambda,1)$ et $u_4=(1,1,1,\lambda)$. Discuter selon les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exercice 26. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants définis par

1. $E=\operatorname{Vect}((1,1,-2),(2,1,-3),(0,1,-1))$
2. $F=\operatorname{Vect}((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$

Exercice 27. Soit $m\in\mathbb{R}$. Donner le rang de la famille $((m,2,3),(-1,m-3,-3),(2,4,m+5))$.

Exercice 28. On considère les vecteurs $u=(1,1,3,2), v=(3,2,5,5), w=(2,-1,-6,1)$ et $t=(5,1,-1,7)$. Donner la dimension de $F=\operatorname{Vect}(u,v,w,t)$ et extraire de la famille (u,v,w,t) une base de F.

VI Bonus pour l'année prochaine

Exercice 29. On admet que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sev de E.

Exercice 30. On admet que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques $S_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $E_{i,j}$ la matrice n'ayant que des 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1. Montrer que la famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2})$ forme une base de $S_3(\mathbb{R})$. et en déduire sa dimension.
3. Montrer que l'ensemble des matrices anti-symétriques $A_3(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Trouver une base de $A_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.
5. Que pouvez-vous conjecturer pour la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$?