Correction TD 17 : DL

I Négligeabilité

Correction 1. A Venir

Correction 2. A Venir

Correction 3. A Venir

Correction 4. A Venir

II Calculs de DL

Correction 5.

1. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}}$:**
   On écrit chacun des DL et on fait la somme :
   $$f(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 + x + x^2 + o(x^2)) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
   On obtient donc : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$.
   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $-\dfrac{x^2}{2} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.
2. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x) = \exp(\sin x)}$:**
   On a, en écrivant le $DL_4(0)$ de la fonction sinus :
   $$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right).$$
   On pose $u(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL. On a :
   $$e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4)$$
   donc on en déduit :
   $$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4}{4!} + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} - 2 \times \frac{x^4}{2 \times 3!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \end{aligned}$$
   Soit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)}$.
   On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$, et comme $\dfrac{x^2}{2} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

3. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x)} = \sqrt[3]{1+x+x^2}$:**
On pose $u(x) = x + x^2$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL. On a :

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}u + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}u^2 + o(u^2),$$

donc on en déduit :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}(x+x^2) - \frac{1}{9}(x+x^2)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$

Soit finalement : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{3}$, et comme $\frac{2}{9}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

4. **DL en 0 à l'ordre 5 de $\mathbf{f(x)} = \cos\sqrt{\mathbf{x}}$:**
On pose $u(x) = \sqrt{x}$. On a bien $u(0) = 0$, on peut donc composer. On écrit le DL de cos à l'ordre 10, afin d'obtenir de l'ordre 5 en remplaçant u par $\sqrt{x}$. On a :

$$\cos u \underset{0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \frac{u^8}{8!} - \frac{u^{10}}{10!} + o(u^{10}),$$

soit en composant : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \frac{x^5}{10!} + o(x^5)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 - \frac{x}{2}$, et comme $\frac{x^2}{4!} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

5. **DL en 0 à l'ordre 1 de $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{1}}{\sin \mathbf{x}}$:**
On écrit le DL de sin à l'ordre 3 car il y a des simplifications :

$$\frac{1}{\sin x} \underset{0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} \underset{0}{=} \frac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right)}.$$

On pose $u(x) = -\frac{x^2}{3!} + o(x^2)$. On a :

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u).$$

Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL :

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)$$

et donc :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^2)\right),$$

soit finalement : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\frac{x}{6} + o(x)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = -\frac{x}{6}$. On ne connaît pas le terme suivant du DL, donc on ne peut pas déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0 (il faudrait pousser le DL plus loin).

6. **DL en 0 à l'ordre 5 de $\mathbf{f(x)} = (\cos \mathbf{x})^{\sin \mathbf{x}}$:**
On commence par mettre la fonction sous forme exponentielle, car $\cos x > 0$ au voisinage de 0 : $f(x) = \exp(\sin x \ln(\cos x))$. On écrit le DL de cos et on remplace dans le logarithme :

$$\ln(\cos x) \underset{0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right).$$

On pose $u(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on peut composer les DL :

$$\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Soit par composee :

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5)\\ &\underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^5) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).\end{aligned}$$

On multiplie ensuite par le DL de sin :

$$\sin x \ln(\cos x) \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{12} + o(x^5) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

Puis on pose $u(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^5)$, et on compose par le DL de exp car $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$: $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1$. De plus, on a $-\frac{x^3}{2} > 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $-\frac{x^3}{2} < 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

7. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}}$:**
On passe sous forme exponentielle : $f(x) = \exp(\frac{1}{x}\ln(1+x))$. On écrit ensuite le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et on divise par x :

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Attention on ne peut pas composer directement car ce qu'on obtient ne tend pas vers 0 ! On remplace dans l'exponentielle :

$$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right).$$

On peut cette fois composer par le DL de exp. On obtient :

$$f(x) \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$$

Soit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)\right)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = e - \frac{e}{2}x$, et comme $\frac{11}{24}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

8. **DL en 0 à l'ordre 8 de $\mathbf{f(x) = \sin x - x\cos x}$:**
On écrit les deux DL de sin et cos et on remet dans l'expression de f. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + o(x}$

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$. De plus, on a $\frac{x^3}{3} < 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $\frac{x^3}{3} > 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

9. **DL en 0 à l'ordre 2 de $\mathbf{f(x) = 2^x - 1}$:**
On passe sous forme exponentielle : $f(x) = e^{x\ln 2} - 1$. On a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln 2 = 0$, donc on peut composer par le DL de exp. On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} x\ln 2 + \dfrac{\ln^2(2)}{2}x^2 + o(x^2)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = x\ln 2$, et comme $\dfrac{\ln^2(2)}{2}x^2$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

10. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = e^{\sqrt{1+x}}}$:**
On écrit le DL de $\sqrt{1+x}$:
$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$
Attention, cette expression ne tend pas vers 0, on ne peut pas composer directement. On remplace dans l'exponentielle :
$$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right).$$
On peut cette fois composer, et on obtient :
$$f(x) \underset{0}{=} e\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3 + o(x^3)\right).$$
On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)\right)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = e + \dfrac{e}{2}x$. De plus, on a $\dfrac{x^3}{48} < 0$ si $x < 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0 à gauche, et $\dfrac{x^3}{48} > 0$ si $x > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0 à droite.

11. **DL en 0 à l'ordre 6 de $\mathbf{f(x) = \tan^2 x}$:**
On a $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$. On élève ce DL au carré :
$$\tan x \underset{0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{15} + \frac{x^6}{9} + o(x^6).$$
On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + \dfrac{17}{45}x^6 + o(x^6)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

12. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}$:**
On commence par écrire le DL à l'intérieur :
$$\frac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3).$$
On remplace dans le logarithme :
$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right).$$
On pose $u(x) = -\dfrac{x^2}{3!} + o(x^3)$. On a bien $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, donc on peut composer par le DL du logarithme, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} -\dfrac{x^2}{6} + o(x^3)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $-\dfrac{x^2}{6} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

13. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}}$:**
On a :
$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$
On élève ce DL aa cube :
$$\frac{1}{(1-x)^3} \underset{0}{=} \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)^3 = 1+3x+3x^2+3x^3+x^3+3x^2+o(x^3) \underset{0}{=} 1+3x+6x^2+4x^3+o(x^3).$$
Puis on multiplie par $1+x$:
$$f(x) \underset{0}{=} (1+x)\left(1 + 3x + 6x^2 + 4x^3 + o(x^3)\right) \underset{0}{=} 1 + 3x + 6x^2 + 4x^3 + x + 3x^2 + 6x^3 + o(x^3).$$
Soit en rassemblant les termes : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 + 4x + 9x^2 + 10x^3 + o(x^3)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + 4x$, et comme $9x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

14. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x) = \ln(1 + \cos(2x))}$:**
On commence par écrire le DL de $\cos(2x)$:
$$\cos(2x) \underset{0}{=} 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) \underset{0}{=} 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4).$$
On remplace dans $f(x)$:
$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1 + 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} \ln\left(2 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right).$$
Attention, on ne peut pas composer directement par le DL du logarithme :
$$f(x) \underset{0}{=} \ln 2 + \ln\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right).$$
On compose ensuite les DL en posant $u(x) = -x^2 + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$, qui tend bien vers 0 en 0, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \ln 2 - x^2 - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = \ln 2$, et comme $-x^2 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

15. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}}$:**
On essaye de se ramener à du $\dfrac{1}{1+u(x)}$, avec $u(x)$ qui tend vers 0 en 0 :
$$\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}}.$$
On pose $u(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2}$, et on a bien $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, on peut composer les DL :
$$\frac{1}{x^2+x+2} \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)\right).$$
En développant, puis en multipliant par $1+x$, on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8}\right) + o(x^3)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$, et comme $-\dfrac{3x^2}{8} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

16. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x)} = \left(\dfrac{\sin \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{2}}$:**
On écrit tout d'abord le DL à l'intérieur :

$$\frac{\sin x}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3).$$

On élève ensuite au carré, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{45}x^4 + o(x^4)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 1$, et comme $-\dfrac{x^2}{3} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

17. **DL en 0 à l'ordre 4 de $\mathbf{f(x)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}\dfrac{\mathbf{x}}{\tan \mathbf{x}}\right)$:**
On commence par le DL à l'intérieur :

$$\frac{x}{\tan x} \underset{0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)}.$$

On pose ensuite $u(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{15}$, qui tend vers 0 en 0. On peut donc composer les DL et on obtient :

$$\frac{x}{\tan x} \underset{0}{=} 1 - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15}\right)^2 + o(x^2) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{11x^4}{45} + o(x^4).$$

On remplace dans $f(x)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{11x^4}{45} + o(x^4)\right)\right) \underset{0}{=} \sin\left(\frac{\pi}{6}x^2 - \frac{11\pi}{90}x^4 + o(x^4)\right)$$

en utilisant les formules de trigonométrie. On a $\dfrac{\pi}{6}x^2 - \dfrac{11\pi}{90}x^4 + o(x^4)$ qui tend vers 0 en 0, donc on peut composer les DL, et on obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{6}x^2 + \dfrac{\pi}{90}x^4 + o(x^4)}$.
On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y = 0$, et comme $\dfrac{\pi}{6}x^2 > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

18. **DL en 0 à l'ordre 3 de $\mathbf{f(x)} = (\mathbf{1} + \arctan \mathbf{x})^{\frac{1}{\mathbf{x}}}$:**
On met sous forme exponentielle : $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1 + \arctan x\right)\right)$.
On a de plus : $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$, et donc on doit calculer le DL de :

$$\ln(1 + \arctan x) \underset{0}{=} \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right).$$

On a $\lim\limits_{x \to 0} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4) = 0$, donc par composée de DL :

$$\begin{aligned}\ln(1 + \arctan x) &\underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^4 + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\end{aligned}$$

On obtient :

$$f(x) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right).$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)=0$, donc par composée de DL :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{12}\right)^3+o(x^3)\right) \\ &\underset{0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)\right) \end{aligned}$$

On obtient finalement : $\boxed{f(x)\underset{0}{=} e-\dfrac{ex}{2}+\dfrac{ex^2}{8}+\dfrac{ex^3}{16}+o(x^3)}$.

On en déduit que la tangente en 0 a pour équation $y=e-\dfrac{e}{2}x$, et comme $\dfrac{ex^2}{8}>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Correction 6. Je ne donne les détails que pour le début.

1. **DL de $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$ au voisinage de $\mathbf{x_0=\frac{1}{4}}$ à l'ordre $n=5$.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-\dfrac{1}{4}$, soit $x=X+\dfrac{1}{4}$. On cherche le $DL_5(0)$ de $F(X)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+X}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(1+4X)}$. Pour cela, on pose $u(X)=4X$. On a $u(0)=0$, et :

   $(1+u)^{\frac{1}{2}}\underset{0}{=}1+\dfrac{1}{2}u+\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}u^2+\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}}{3!}u^3+\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}u^4+\dfrac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{7}{2}}{5!}u^5+o(u^5)$.

   Soit par composée de DL :

   $$F(X)\underset{0}{=}\frac{1}{2}\left(2+2X-2X^2+4X^3-10X^4+28X^5+o(X^5)\right).$$

   On en déduit, en revenant à x : $\boxed{f(x)\underset{\frac{1}{4}}{=}\frac{1}{2}+(x-\frac{1}{4})-(x-\frac{1}{4})^2+2(x-\frac{1}{4})^3-5(x-\frac{1}{4})^4+14(x-\frac{1}{4})^5+o((x}$

   On en déduit que la tangente en $\dfrac{1}{4}$ a pour équation $y=\dfrac{1}{2}+(x-\dfrac{1}{4})$, et comme $-(x-\dfrac{1}{4})^2<0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de $\dfrac{1}{4}$.

2. **DL de $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre n quelconque.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-1$. On doit faire le DL en 0 de $g(X)=\dfrac{1}{X+1}$. On obtient :

   $$g(X)\underset{0}{=}1-X+X^2-X^3+X^4+\ldots+(-1)^nX^n+o(X^n).$$

   En revenant à x on a donc :

   $$\boxed{f(x)\underset{1}{=}1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\cdots+(-1)^n(x-1)^n+o((x-1)^n)}$$

   On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y=1-(x-1)=2-x$, et comme $(x-1)^2>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

3. **DL de $\mathbf{f(x)=\frac{x+1}{x-1}}$ au voisinage de $x_0=3$ à l'ordre $n=4$.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-3$. On doit calculer le DL en 0 à l'ordre 4 de $g(X)=\dfrac{X+4}{X+2}$. On a :

   $$\frac{1}{X+2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{X}{2}}\underset{0}{=}\frac{1}{2}\left(1-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}-\frac{X^3}{8}+\frac{X^4}{16}+o(X^4)\right),$$

puis par produit :

$$\begin{aligned}\frac{X+4}{X+2} &\underset{0}{=} (X+4)\left(\frac{1}{2}-\frac{X}{4}+\frac{X^2}{8}-\frac{X^3}{16}+\frac{X^4}{32}+o(X^4)\right)\\ &\underset{0}{=} 2-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}-\frac{X^3}{8}+\frac{X^4}{16}+o(X^4).\end{aligned}$$

En revenant à x, on obtient : $\boxed{f(x)\underset{3}{=}2-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2-\frac{1}{8}(x-3)^3+\frac{1}{16}(x-3)^4+o((x-3)^4)}$.

On en déduit que la tangente en 3 a pour équation $y=2-\frac{1}{2}(x-3)$, et comme $\frac{1}{4}(x-3)^2>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

4. **DL de $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $x_0=\frac{\pi}{4}$ à l'ordre $n=3$** (Difficile).

   On se ramène à 0 en posant $X=x-\frac{\pi}{4}$. On obtient : $\boxed{f(x)\underset{\frac{\pi}{4}}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})(1-\frac{2}{\pi})+(x-\frac{\pi}{4})^2(-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}+\frac{6}{\pi^2})+\right.}$

   On en déduit que la tangente en $\frac{\pi}{4}$ a pour équation $y=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+(x-\frac{\pi}{4})(1-\frac{2}{\pi})\right]$, et comme $(x-\frac{\pi}{4})^2(-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}+\frac{6}{\pi^2})<0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

5. **DL de $f(x)=x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre $n=3$.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-1$. On obtient : $\boxed{f(x)\underset{1}{=}1-(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{5}{6}(x-1)^3+o((x-1)^3)}$

   On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y=1-(x-1)=2-x$, et comme $-\frac{1}{2}(x-1)^2<0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

6. **DL de $f(x)=e^{x-1}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre n quelconque.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-1$. On obtient : $\boxed{f(x)=1+(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(x}$

   On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y=1+(x-1)=x$, et comme $\frac{1}{2}(x-1)^2>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

7. **DL de $f(x)=\frac{x^n\ln x}{x^2-1}$ au voisinage de $x_0=1$ à l'ordre 2.**

   On se ramène à 0 en posant $X=x-1$. On obtient : $\boxed{f(x)\underset{1}{=}\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}(n-1)+(x-1)^2(1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4})+}$

   On en déduit que la tangente en 1 a pour équation $y=\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}(n-1)$, et comme $(x-1)^2(1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{4})>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de sa tangente au voisinage de 1.

II. 1 Recherche de limites et d'équivalents

Correction 7. Je ne donne les détails que pour les premières questions.

1. **Calcul de la limite de $x\mapsto\frac{e^x-\ln(1+x)-\cos x}{\sin x-x}$ en $a=0$:**
   Inutile de calculer un DL de la fonction. Il suffit ici de calculer un DL du numérateur, un DL du dénominateur, d'en déduire des équivaments et de conclure par quotient d'équivalents. Pour cela, l'idée est de faire un DL de chacun des termes, à un ordre suffisamment grand pour qu'il reste un terme, mais pas trop grand non plus pour ne pas compliquer les calculs. On a :

$$e^x-\ln(1+x)-\cos x\underset{0}{=}1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\underset{0}{=}\frac{3x^2}{2}+o(x^2)\underset{0}{\sim}\frac{3x^2}{2}.$$

Et pour le dénominateur :

$$\sin x - x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x \underset{0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$

Par quotient d'équivalents, on en déduit : $f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{3x^2}{2}}{\frac{x^3}{6}} = -\frac{9}{x}$, et donc : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty}$

2. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ **en** $a = 0$ **:**
   On fait un DL au numérateur :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1).$$

   On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}}$.

3. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ **en** $a = 0$ **:**
   On a pour le numérateur :

$$\sin^2 x - x\ln(1+x) \underset{0}{=} \left(x + o(x^2)\right)^2 - x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} x^2 + o(x^3) - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}.$$

   Et pour le dénominateur :

$$e^x + \cos x - \sin x - 2 \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 2 \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}.$$

   Par quotient d'équivalents, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{3}} = \frac{3}{2}$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}}$.

4. **Calcul de la limite de** $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ **en** $a = +\infty$ **:**
   On commence par poser $X = \frac{1}{x}$. On cherche la limite en 0 de $g(X) = \frac{1}{X^3}\sin X - \frac{1}{X^2}$. On a :

$$g(X) \underset{0}{=} \frac{1}{X^3}\left(X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)\right) - \frac{1}{X^2} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

   On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{6}}$.

5. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ **en** $a = 0$ **:** On a :

$$f(x) = \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^2 \sin x} \underset{0}{=} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2}{x^2\sin x} \underset{0}{=} \frac{x^2 - 2\frac{x^3}{6} - x^2 + o(x^3)}{x\sin x} \underset{0}{=} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 \sin x}.$$

   Or on sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ (inutile ici de faire un DL), donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{3}}{x^3} = -\frac{1}{3}$, et : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}}$.

6. **Calcul de la limite de** $x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ **en** $a = 1$ **:**
   On commence par poser $X = x - 1$. On calcule la limite en 0 de :

$$g(X) = \frac{(X+1)^{X+1} - (X+1)}{-X + \ln(X+1)} = \frac{e^{(X+1)\ln(X+1)} - X - 1}{\ln(1+X) - X}.$$

   Or on a :

$$\ln(1+X) \underset{0}{=} X - \frac{X^2}{2} + o(X^2),$$

donc en remplaçant :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)} \underset{0}{=} \exp\left((1+X)\left(X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)\right) \underset{0}{=} \exp\left(X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)\right)$$

On peut composer par le DL de l'exponentielle, car $X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$ tend vers 0 :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)} \underset{0}{=} 1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{1}{2}\left(X+\frac{X^2}{2}\right)^2+o(X^2) \underset{0}{=} 1+X+X^2+o(X^2).$$

On a donc pour le numérateur :

$$e^{(X+1)\ln(X+1)}-X-1 \underset{0}{=} X^2+o(X^2) \underset{0}{\sim} X^2.$$

Pour le dénominateur, on a : $\ln(1+X)-X = -\frac{X^2}{2}+o(X^2) \underset{0}{\sim} -\frac{X^2}{2}$, donc par quotient d'équivalents, $g(X) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{X^2}{2}}{X^2} = -2$. On en déduit : $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -2}$.

7. **Calcul de la limite de $x \mapsto \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $a=+\infty$:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = e}$.
8. **Calcul de la limite de $x \mapsto (x^6+x^2+1)^{\frac{1}{6}}-(x^4+1)^{\frac{1}{4}}$ en $a=+\infty$:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
9. **Calcul de la limite de $x \mapsto \left(\frac{3^{\frac{1}{x}}+4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a=+\infty$:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
10. **Calcul de la limite de $x \mapsto \frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-\tan x}$ en $a=0$:** $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -1}$.
11. **Calcul de la limite de $x \mapsto (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ en $a=\frac{1}{2}$:** $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\pi}}$.
12. **Calcul de la limite de $x \mapsto \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x-1\right]\ln x$ en $a=+\infty$:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
13. **Calcul de la limite de $x \mapsto x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ en $a=+\infty$:** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
14. **Calcul de la limite de $x \mapsto \frac{\tan x-1}{\sin(2x)-1}$ en $a=\frac{\pi}{4}$:** $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = +\infty}$.
15. **Calcul de la limite de $x \mapsto x^{\frac{1}{1-x}}$ en $a=1$:** $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-1}}$.
16. **Calcul de la limite de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}$ en $a=1$:** $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = -1}$.

Correction 8. x Je ne donne les détails que pour les premières questions.

1. **Équivalent de $f(x) = \frac{2}{\sin x}-\frac{2}{\ln(1+x)}$ au voisinage de $a=0$:**
On met au même dénominateur, puis on fait un DL à l'ordre 3 :

$$f(x) = \frac{2\ln(1+x)-2\sin x}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{=} \frac{2\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-2(x+o(x^2))}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{=} \frac{-x^2+o(x^2)}{\sin x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1,$$

en utilisant les équivalents usuels de $\sin x$ et $\ln(1+x)$ en 0. On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -1}$.

2. **Équivalent de $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$ au voisinage de $a = 0$:**
On peut composer avec le DL du sinus car $2x$ tend vers 0 en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} -x^3 + o(x^3).$$

On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -x^3}$.

3. **Équivalent de $f(x) = \ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$ au voisinage de $a = 0$:**
Il vaut mieux toujours commencer par les fonctions les plus à l'intérieur :

$$\frac{\tan x}{x} \underset{0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

Donc en remplaçant dans f :

$$f(x) \underset{0}{=} \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{3} + o(x^2),$$

en composant avec le DL du ln car $\frac{x^2}{3} + o(x^2)$ tend vers 0 en 0. On a donc : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{3}}$.

4. **Équivalent de $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$:**
On commence par poser $X = \frac{1}{x}$, et on cherche un équivalent en 0 de $g(X) = \ln\left(1 + \frac{1}{1+X}\right) - X = \ln\left(1 + \frac{X}{1+X}\right) - X$. On a :

$$\frac{X}{1+X} \underset{0}{=} X(1 - X + o(X)) = X - X^2 + o(X^2).$$

Donc en composant avec le DL du ln :

$$\ln\left(1 + \frac{X}{1+X}\right) - X \underset{0}{=} X - X^2 - \frac{1}{2}\left(X - X^2\right)^2 - X + o(X^2) \underset{0}{==} \frac{3}{2}X^2 + o(X^2).$$

En revenant à x, on obtient donc : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{2}x^2}$.

5. **Équivalent de $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$ au voisinage de $a = 0$:** $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}e^{e-1}}$.

6. **Équivalent de $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1 + \sin x)$ au voisinage de $a = 0$:**
Ici, il faut monter l'ordre petit à petit car les termes se simplifient au fur et à mesure... On obtient : $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^4}{12}}$.

II. 2 Étude locale de fonctions

Correction 9.

1. $f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$

- On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x) = F(X) & = & \dfrac{1}{X}(1+X)e^X \\ & \underset{0}{=} & \dfrac{1}{X}\left(1 + 2X + \dfrac{3}{2}X^2 + \circ(X^2)\right) \\ & \underset{0}{=} & \dfrac{1}{X} + 2 + \dfrac{3}{2}X + \circ(X). \end{array}$$

- On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

- Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{3}{2x} > 0$ et au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{3}{2x} < 0$, ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote olique au voisinage de $+\infty$ et elle est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

2. $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car la fonction racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x) = F(X) & = & \dfrac{1}{X}\left(1 + X + X^3\right)^{\frac{1}{3}} \\ & \underset{0}{=} & \dfrac{1}{X}\left(1 + \dfrac{X}{3} - \dfrac{X^2}{9} + \circ(X^2)\right) \\ & \underset{0}{=} & \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{X}{9} + \circ(X). \end{array}$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi, la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{3}$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

   - Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{9x} > 0$ et au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{1}{9x} < 0$, ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote olique au voisinage de $+\infty$ et elle est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

3. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
   - $\mathcal{D}_f =]-1, +\infty[$. On ne fait l'étude qu'en $+\infty$.
   - On pose $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} f(x) = F(X) & = & e^{X \ln\left(\frac{1+X}{X}\right)} \\ & \underset{0}{=} & e^{X(-\ln X + X + \circ(X))} \\ & \underset{0}{=} & e^{-X\ln(X) + \circ(X \ln X)} \\ & \underset{0}{=} & 1 - X\ln(X) + \circ(X\ln X). \end{array}$$

- On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \circ\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

On remarque que cela n'est absolument pas un DL (ni d'ailleurs un développement asymptotique) car il y a présence de $\ln(x)$. Mais cela nous donne quand même l'asymptote et la position de la courbe par rapport à cette asymptote. On remarque aussi que le DL de l'exponentielle a pû être utilisé car, par croissance comparée, on a : $\lim_{X \to 0^+} X \ln X = 0$. De plus, par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, cela assure que $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

- Comme quand x est au voisinage de $+\infty$, on a : $\frac{\ln(x)}{x} > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

4. $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$
   - $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9 + x^2 > 0$.
   - On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= \frac{1}{X} - 2 + \frac{1}{X^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{X^2} + 9}} \\ &= \frac{1}{X} - 2 + \frac{1}{X^2} \times \frac{|X|}{\sqrt{1+9X^2}} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{X} - 2 + \frac{|X|}{X^2}\left(1 - \frac{9}{2}X^2 + \circ(X^2)\right). \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient que

$$F(X) \underset{0^+}{=} \frac{2}{X} - 2 - \frac{9}{2}X + \circ(X) \qquad \text{et} \qquad F(X) \underset{0^-}{=} -2 + \frac{9}{2}X + \circ(X).$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} 2x - 2 - \frac{9}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} -2 + \frac{9}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Ainsi la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$ au voisinage de $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ au voisinage de $-\infty$.
   - Comme $-\frac{9}{2x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et comme $\frac{9}{2x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

5. $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$
   - $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
   - On pose $X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = F(X) &= -\frac{1}{X^2}\ln(1+X) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{X^2}\left(X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \circ(X^3)\right) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{X} + \frac{1}{2} - \frac{X}{3} + \circ(X). \end{aligned}$$

- On repasse à x et on obtient

$$f(x) \underset{+\infty}{=} -x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} -x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, la droite d'équation $y=-x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

- Comme $-\dfrac{1}{3x}<0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\dfrac{1}{3x}>0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et elle est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

6. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$
   - $\mathcal{D}_f=]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$.
   - On pose $X=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{X}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x)=F(X) &= \frac{e^X}{|X|}(1+2X)^{\frac{1}{2}} \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{|X|}\left[\left(1+X+\frac{X^2}{2}\right)\left(1+X-\frac{X^2}{2}\right)+\circ(X^2)\right] \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{|X|}\left(1+2X+X^2+\circ(X^2)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$F(X)\underset{0^+}{=}\frac{1}{X}+2+X+\circ(X) \qquad \text{et} \qquad F(X)\underset{0^-}{=}-\frac{1}{X}-2-X+\circ(X).$$

   - On repasse à x et on obtient

$$f(x)\underset{+\infty}{=}x+2+\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x)\underset{-\infty}{=}-x-2-\frac{1}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y=-x-2$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

   - Comme $\dfrac{1}{x}>0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote $y=x+2$ au voisinage de $+\infty$ et comme $-\dfrac{1}{x}>0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est au-dessus de l'asymptote $y=-x-2$ au voisinage de $-\infty$.

Correction 10.

1. **Étude de la fonction** $\mathbf{f : x \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}}$:
   - Domaine de définition :
     La fonction f est bien définie si $x\neq 0$ et si $e^{\frac{1}{x}}\neq 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}\neq 0$. Comme on a toujours $\dfrac{1}{x}\neq 0$, le domaine de définition est $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
   - Étude des limites aux bornes du domaine de définition
     - ⋆ Étude en l'infini :
       On pose $X=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{X}$. On obtient

$$f(x)=F(X)=\frac{e^X+1}{e^X-1}\underset{0}{=}\frac{2}{X}-\frac{X}{3}+\circ(X).$$

En repassant à x, on obtient

$$f(x)\underset{+\infty}{=}2x-\frac{1}{3x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x)\underset{-\infty}{=}2x-\frac{1}{3x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, on obtient les résultats suivants :

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
- La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
- La courbe est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ et elle est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $-\infty$.

⋆ Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :
On commence par se placer en 0^+ et on obtient :

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1 + e^{-\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1 + e^{-\frac{1}{x}}}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Ainsi, par composition, somme et quotient de limite, on obtient que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

On se place maintenant en 0^- et on a alors directement par propriété sur les composée, somme et quotient de limite que : $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Ainsi, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0, elle est par contre prolongeable par continuité à droite et à gauche mais pas au point puisque les limites à droite et à gauche ne sont pas les mêmes.

- Étude des variations :
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme quotient, composée et somme de fonctions dérivables. De plus, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad f'(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)^2}.$$

Ainsi, comme f' est strictement positive, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗ -1	‖	1 ↗ $+\infty$

- Étude de la dérivabilité en 0 à gauche et à droite (cela n'a de toute façon aucun sens d'étudier la dérivabilité en 0 puisque la fonction f n'est même pas continue en 0) :

⋆ Étude de la dérivabilité en 0^+ :
On étudie le taux d'accroissement quand x tend vers 0^+ :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)} = \frac{2}{xe^{\frac{1}{x}}(1 - e^{-\frac{1}{x}})}.$$

Comme, par croissance comparée, on a : $\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 0$.

⋆ Étude de la dérivabilité en 0^- :
On étudie le taux d'accroissement quand x tend vers 0^- : :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x(e^{\frac{1}{x}} - 1)} = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \times \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Comme, par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = 0$.

2. **Étude de la fonction $\mathbf{f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}}$**

- Domaine de définition :
La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

- Limites en $\pm\infty$:
On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} X$. On a de plus

$$f(x) = F(X) = \frac{e^X}{X} \underset{0}{=} \frac{1 + X + \frac{X^2}{2} + \circ(X^2)}{X} \underset{0}{=} \frac{1}{X} + 1 + \frac{X}{2} + \circ(X).$$

On obtient donc que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x + 1 + \frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, on obtient les résultats suivants :

  - ⋆ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
  - ⋆ La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
  - ⋆ La courbe est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et elle est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :

  - ⋆ Étude en 0^+ : En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on remarque que : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en 0 car elle n'est déjà pas prolongeable par continuité à droite en 0. Et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage à droite de 0.
  - ⋆ Étude en 0^+ : On a par propriétés sur la composition et le produit de limites que : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité à gauche en 0 en posant $f(0) = 0$.

- Variations :
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x-1}{x}.$$

Comme $e^{\frac{1}{x}} > 0$ il suffit d'étudier le signe du quotient et on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	-	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- Étude de la dérivabilité à gauche en 0 :
C'est la seule qui a un sens car on a prolongé la fonction par continuité qu'à gauche en posant $f(0) = 0$. On étudie cette dérivabilité à gauche par le taux d'accroissement. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = e^{\frac{1}{x}}.$$

Et par propriété sur la composition de limite, on a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Ainsi la fonction ainsi prolongée est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$. En particulier la fonction prolongée admet une demi-tangente horizontale à gauche en 0.

3. **Étude de la fonction $\mathbf{f} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x^2} \arctan\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)$**

- Domaine de définition :
La fonction$f$ est bien définie si $x \neq 0$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

- Limites en $\pm\infty$:
On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} X = 0 = \lim_{x \to -\infty} X$. On a de plus

$$f(x) = F(X) = \frac{\arctan(X)}{X^2} \underset{0}{=} \frac{X - \frac{X^3}{3} + \circ(X^3)}{X^2} \underset{0}{=} \frac{1}{X} - \frac{X}{3} + \circ(X).$$

On obtient donc que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{-\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, on obtient les résultats suivants :
  - ⋆ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
  - ⋆ La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
  - ⋆ La courbe est en-dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ et elle est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $-\infty$.

- Étude d'un éventuel prolongement par continuité en 0 :
On a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ par propriété sur la composition de limites. Puis par produit de limites, on obtient que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.

- Étude de la dérivabilité en 0 :
Par le taux d'accroissement, on obtient que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ par propriété sur la composition de limites. Puis par produit de limites, on obtient que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

Ainsi la fonction f prolongée est bien dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en 0.

Correction 11. **Soit la fonction f définie par :**

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R},\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \arctan \mathbf{x} + \mathbf{e}^{\mathbf{x}} - \mathbf{1}.$$

1. **Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.**
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
   - La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞. En particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x.$$
   Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme somme de deux termes strictement positifs.
   - Limites aux bornes :
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$ par propriétés sur les sommes de limites. Et ainsi $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2} - 1$ au voisinage de $-\infty$.
     - ⋆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par propriétés sur les sommes de limites.
   - Variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\frac{\pi}{2} - 1$ $\nearrow$	$+\infty$

2. **Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.**
   D'après la question précédente, on a :
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.
   - La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[}$.

3. **Soit g la réciproque de la bijection précédente.**
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
   En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
   - On a :
     - ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞.
     - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

     Ainsi d'après le théorème sur la régularité des fonctions réciproques, on sait que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de class}}$
   - Comme la fonction g est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[$, on sait d'après le théorème de Taylor-Young que $\boxed{g \text{ admet en tout point de } I = \left]-\frac{\pi}{2} - 1, +\infty\right[, \text{ des développements limités à tout ord}}$

4. **En utilisant le fait que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.**
   - Comme g admet un DL à tout ordre au voisinage de tout point de I et que $0 \in I$, g admet en particulier un DL à l'ordre 2 en 0. Ainsi il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que

     $$g(u) \underset{0}{=} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \circ(u^2).$$

   - On veut savoir si on peut poser $u = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, on a bien que $f(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on va pouvoir poser $u = f(x)$. Il reste donc à trouver le $DL_2(0)$ de f. On a

     $$f(x) \underset{0}{=} x + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) - 1 \underset{0}{=} 2x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2).$$

   - Par composition de DL du même ordre, on a, en posant $u = f(x)$:

     $$\begin{aligned} g(f(x)) &\underset{0}{=} a_0 + a_1\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \circ(x^2) \\ g(f(x)) &\underset{0}{=} a_0 + 2a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \circ(x^2) \end{aligned}$$

     Or on connait un deuxième DL de $f \circ g$: en effet, $g(f(x)) = x \underset{0}{=} x + o(x^2)$.
   - Puis par unicité du développement limité, on obtient que

     $$\begin{cases} a_0 & = 0 \\ 2a_1 & = 1 \\ \dfrac{a_1}{2} + 4a_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 & = 0 \\ a_1 & = \dfrac{1}{2} \\ a_2 & = -\dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

     Ainsi on obtient que : $\boxed{g(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \circ(x^2)}$.

Correction 12.

1. **Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**
   - La fonction f est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞.
   - En particulier la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^x + 1$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme somme de deux termes strictement positifs.
   - Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les sommes de limites.
   - Variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   - On obtient donc :
     - ⋆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.

- ⋆ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ⋆ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$ On note f^{-1} la fonction réciproque.

2. **Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1}.**

- On a :
  - ⋆ La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe C^∞.
  - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

  Ainsi d'après le théorème sur la régularité des fonctions réciproques, on sait que $\boxed{\text{la fonction } f^{-1} \text{ est de cl}}$
- Comme la fonction f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on sait d'après le théorème de Taylor-Young que f^{-1} admet en tout point de $\mathbb{R}$, des développements limités à tout ordre. En particulier f^{-1} admet un DL à l'ordre 3 en 0. Ainsi il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $f^{-1}(u) \underset{0}{=} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \circ(u^3)$.
- On veut savoir si on peut poser $u = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, on a bien que $f(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on va pouvoir poser $u = f(x)$. Il reste donc à trouver le $DL_3(0)$ de f. On a

$$f(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) + x - 1 \underset{0}{=} 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3).$$

- Par composition de DL du même ordre, on a, en posant $u = f(x)$:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &\underset{0}{=} a_0 + a_1\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + +a_3\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \circ(x^3)\\
f^{-1}(f(x)) &\underset{0}{=} a_0 + 2a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_1}{6} + 2a_2 + 8a_3\right)x^3 + \circ(x^3)
\end{aligned}$$

  Or on connait un deuxième DL de $f^{-1} \circ f$: en effet, $f^{-1}(f(x)) = x \underset{0}{=} x + o(x^2)$.
- Puis par unicité du développement limité, on obtient que

$$\begin{cases} a_0 &= 0\\ 2a_1 &= 1\\ \dfrac{a_1}{2} + 4a_2 &= 0\\ \dfrac{a_1}{6} + 6a_2 + 8a_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 &= 0\\ a_1 &= \dfrac{1}{2}\\ a_2 &= -\dfrac{1}{16}\\ a_3 &= \dfrac{1}{192}. \end{cases}$$

  Ainsi on obtient que

$$\boxed{g(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} + \circ(x^3).}$$

II. 4 Développement limité et régularité

Correction 13. **Soit la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2 - 1}$.**

1. **Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.**
On peut par exemple pour cela faire un $DL_0(1)$. On va même faire un $DL_1(1)$ afin de répondre en même temps à la question d'après. On pose donc pour cela $X = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + X$. On obtient après calculs que
$$f(x) = F(X) = \frac{(1+X)\ln(1+X)}{X(X+2)} = \frac{1}{2X} \times (1+X)\ln(1+X)\left(1 + \frac{X}{2}\right)^{-1} \underset{0}{=} \frac{1}{2} + \circ(X).$$
Ainsi on a
$$f(x) \underset{1}{=} \frac{1}{2} + \circ(x-1).$$
Donc, comme on a existence d'un $DL_0(1)$, la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $f(1) = \frac{1}{2}$.
2. **Ce prolongement est-il dérivable ?**
Comme on a existence d'un $DL_1(1)$, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.
3. **Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.**
Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Puis par propriété sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
4. **Ce prolongement est-il dérivable ?**
Avec le taux d'accroissement, on a :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = +\infty$$
par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi la fonction f ainsi prolongée en 0 n'est pas dérivable en 0 et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Correction 14. Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f(x)} = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. **Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?**
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composées, somme et quotient de fonctions dérivables.
   - Étude de la dérivabilité en 0 :
     - ⋆ On a par propriété sur la composition de limites que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
     - ⋆ On a par propriétés sur la compositions, somme et quotient de limites que : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

   Ainsi pour que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, il faut prendre $a = 1$. Et pour $a = 1$, la fonction f est continue en 0.

   Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $a = 1$.
2. **On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $\mathbf{f'(x)}$ pour tout x réel.**
   - Étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}^{+\star}$:
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

- Étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}^{-\star}$:
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composées, somme et quotient de fonctions dérivables et pour tout $x<0$: $f'(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{-x}}-e^{\sqrt{-x}}}{4\sqrt{-x}}$.
- Étude de la dérivabilité en 0 :
  - $\star$ On a : $\cos\left(\sqrt{x}\right)\underset{0}{=}1-\dfrac{x}{2}+\circ(x)$. Ainsi il y a existence d'une $DL_1(0)$ d'où la dérivabilité à droite en 0 de f avec $f'_d(0)=-\dfrac{1}{2}$.
  - $\star$ On a : $\dfrac{e^{\sqrt{-x}}+e^{-\sqrt{-x}}}{2}\underset{0}{=}1-\dfrac{x}{2}+\circ(x)$. Ainsi il y a existence d'une $DL_1(0)$ d'où la dérivabilité à gauche en 0 de f avec $f'_g(0)=-\dfrac{1}{2}$.

  Ainsi comme $f'_g(0)=-\dfrac{1}{2}=f'_d(0)$, la fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction 15. Soit la fonction f définie par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{\cos x}{1+x+x^2}}$. Calculer $\mathbf{f^{(4)}(0)}$.

- La fonction f est bien définie si $1+x+x^2\neq 0$. Comme $\Delta=-3<0$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- De plus, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions de classe C^∞. Ainsi en particulier elle est de classe C^4 au voisinage de 0. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f admet un $DL_4(0)$ qui est donnée par la formule :

$$f(x)\underset{0}{=}f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\circ(x^4).$$

- Calculons alors le $DL_4(0)$ de la fonction f directement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x)\times(1+(x+x^2))^{-1}\\
&\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\times\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4\right)+\circ(x^4)\\
&\underset{0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)\times\left(1-x+x^3-x^4\right)+\circ(x^4)\\
&\underset{0}{=} 1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x^3-\frac{23}{4!}x^4+\circ(x^4).
\end{aligned}$$

- Par unicité du développement limité, on a donc

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=-\frac{23}{4!}\Leftrightarrow\boxed{f^{(4)}(0)=-23.}$$