Table des matières

Chapitre : Espace vectoriel

$\mathbb{K}$ désignera dans ce chapitre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier strictement positif.

I L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

I. 1 Définition de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Définition 1. Définitions :

- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{K}\}$$

- Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont appelés des vecteurs.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires
- Si $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et si $k \in [\![1, n]\!]$ alors on dit que x_k est la k-ième coordonnées de u.

Exemples.
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{C}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$
- Exemples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{C}^5$: $(1, 2, 3)$, $(i, 0, -i, 5 + i, e^{i\pi/5})$

Remarques.
- Égalité entre vecteurs : $\vec{u}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{v}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff \forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = y_i$
- On omet le plus souvent d'écrire les flèches sur les vecteurs et ainsi, on écrit le vecteur u et pas $\vec{u}$.

Définition 2. Définition de deux opérations :

- **L'addition notée** $+$:

$$\forall \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall \vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n : \quad \vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$$

  On l'appelle une loi de composition interne car $u \in \mathbb{K}^n$ et $v \in \mathbb{K}^n$.

- **La multiplication par un scalaire notée .** :

$$\forall \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \lambda.\vec{u} = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$$

  C'est une loi de composition externe car λ est 'extérieur' à $\mathbb{K}^n$

1. **Propriétés de l'addition** $+$**.** Cette opération :
   - est commutative : $\forall (u, v) \in (\mathbb{K}^n)^2, \ u + v = v + u$
   - est associative : $\forall (u, v, w) \in (\mathbb{K}^n)^3, \ u + (v + w) = (u + v) + w$
   - admet un élément neutre : $\forall u \in \mathbb{K}^n, \ 0_{\mathbb{K}^n} + u = u$
   - admet un symétrique : $\forall u \in \mathbb{K}^n, \ u + (-u) = 0$
2. **Propriétés de la multiplication par un scalaire.** Cette opération :
   - est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}^n$: $\forall (u, v) \in (\mathbb{K}^n)^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ \lambda \cdot (u+v) = \lambda u + \lambda v$
   - est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$: $\forall u \in \mathbb{K}^n, \quad \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{K}^2 : \ (\lambda + \beta) \cdot u = \lambda u + \beta u$
   - est associative : $\forall u \in \mathbb{K}^n, \quad \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ \lambda \cdot (\beta \cdot u) = (\lambda\beta) \cdot u$
   - admet un élément neutre : $\forall u \in \mathbb{K}^n$, $1 \cdot u = u$

Définition 3. Structure d'espace vectoriel :

- Un espace muni de deux lois " $+$" et " $\cdot$" vérifiant les propriétés ci-dessus est appelé espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de l'addition " $+$" et de la multiplication par un scalaire " $\cdot$", noté . est un espace vectoriel.

Remarque. On peut généraliser la notion d'espace vectoriel à pleins d'autres ensembles autres que $\mathbb{K}^n$ (voir BCPST2). On appelle en effet espace vectoriel tout ensemble dans lequel on peut définir deux opérations $+$ et $\cdot$ qui vérifient les propriétés ci-dessus.

Exemples.
- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(R)$, $\mathcal{C}^\infty(R)$
- $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}[X]$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solutions de $y'' + 3y' + y = 0$

I. 2 Combinaisons linéaires finies de vecteurs

Définition 4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ sont tous des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on appelle : $(u_1, \dots, u_k)$ famille de vecteurs.

Exemples.
- La famille $((1, -3), (2, 8), (-4, -3))$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$
- La famille $((6, -3, 8), (7, -1, -2))$ est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Définition 5. Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ une famille de k vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$ qui s'écrit sous la forme

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

avec $(\lambda_1, \dots \lambda_k)$ une famille de k éléments de $\mathbb{K}$

Exemples. Soient $u = (3, -1, 2)$, $v = (0, 4, -5)$, $w = (3, 3, -3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- $u + 2v + 0w = u + 2v = (3, 7, -8)$
- $u - v + w = (6, -2, 4)$

Exercice 6.
1. Montrer que le vecteur $(4, 11, -1)$ est bien une combinaison linéaire de la famille $((3, 4, 0), (-2, 3, -1))$.
2. Montrer que le vecteur $(1, -3)$ est bien une combinaison linéaire de la famille $((2, 1), (1, 1), (-2, 1))$.
3. Montrer que le vecteur $((5+13i), (-16i+8))$ dans $\mathbb{C}^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1+i, -2i)$ et $(4i, 3+4i)$.
4. Montrer que le vecteur $\vec{v}(-9, 2, -2)$ est bien une combinaison linéaire de la famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1(1, 4, -2)$, $\vec{u}_2(0, -1, 1)$ et $\vec{u}_3(2, 1, 0)$.

II Sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

II. 1 Sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Définition 7. Définition d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

1. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ si
   - F est non vide.
   - F est stable par addition, c'est-à-dire : $u, v \in \mathcal{F} \Longrightarrow u + v \in F$
   - F est stable par multiplication par un scalaire, c'est-à-dire : $u \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda u \in F$
2. Il est équivalent de vérifier que, si F est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$, on a :
   - $0 \in F$
   - $u, v \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow u + \lambda v \in F$.

Exemples.
- Sev de $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0\}$
- Sev de $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y = -z\}$
- Sev de $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}$ ou $\{0\}$
- Sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\}$

Théorème 8. Propriétés des sev :

- Un sev est un EV.
- Si F est un sev de $\mathbb{K}^n$, on a toujours $0_{\mathbb{K}^n} \in F$.

⚠ On ne vous demandera jamais de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel directement par la définition. On montrera qu'un ensemble est un espace vectoriel comme sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Méthode pour montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

- On montre que $F \subset \mathbb{K}^n$.
- On montre que $0_{\mathbb{K}^n} \in F$ et ainsi $F \neq \emptyset$
- Soit $(u, v) \in F^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On montre que $\lambda u + v \in F$.

On peut alors conclure en disant que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 9.

1. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + 2y = 0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x - 3y + 4z = 0 \text{ et } 5x - y - z = 0\}$. Montrer que G est un ev.
3. On admet que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f(0) = 0\}$ est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Méthode pour montrer que F N'est PAS un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

- Méthode 1 : On montre que $0_{\mathbb{K}^n}$ n'est pas dans F
  (car un sous espace vectoriel contient forcément $0_{\mathbb{K}^n}$)
- Méthode 2 : On donne un contre-exemple :
  On trouve $u \in F$, $v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda u + v \notin F$.

Exercice 10.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x + 3y - 6z = 1\}$. Étudier si F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y = 0\}$. Étudier si G est un sev de $\mathbb{R}^2$.

II. 2 Exemples usuels de sous espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Proposition 11. Exemples usuels de sev de $\mathbb{K}^n$:

- $\{0\}, \mathbb{K}^n$ sont des sev de $\mathbb{K}^n$.
- Si F et G sont des sev de $\mathbb{K}^n$, alors $F \cap G$ est un sev.

Démonstration. Comme F et G sont des sev de $\mathbb{K}^n$ on a $F \subset \mathbb{K}^n$ et $G \subset \mathbb{K}^n$, donc $F \cap G \subset \mathbb{K}^n$. Donc $F \cap G$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$

On a aussi $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$, donc $F \cap G \neq \emptyset$. Donc $F \cap G$ est non vide.

Enfin si $u, v \in F \cap G$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $u \in F$ et $v \in F$ donc $u + \lambda v \in F$ car F sev et similairement : $u \in G$ et $v \in G$ donc $u + \lambda v \in G$ car G sev. Ainsi $u + \lambda v \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.

$$\boxed{\text{Ainsi } F \cap G \text{ est un sev.}}$$

□

Remarque. ⚠ En revanche, $F \cup G$ n'est PAS un sev !
Contre-exemple : $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0\}$ alors $(1, -1) \in F$, $(2, -1) \in G$ mais $(3, -2) \notin F \cup G$.

II. 3 $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ *un sous espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$

Définition 12. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ est notée

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k) = \{w = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i \in \mathbb{K}^n \mid \text{ avec } \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

Exemples. • Soit $u = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. On a : $\text{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2x, 3x) | \, x \in \mathbb{R}\}$

- Soit $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 2, -1)$. On a : $\text{Vect}(u, v) = \{(a - b, 2a + 2b, 3a - b) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$

Exercice 13. Montrer que $w \in \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (-4, 4, 3)$ $v = (-3, 2, 1)$ et $w = (-1, 6, 7)$.

Proposition 14. Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ une famille de k vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- L'ensemble $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.
- On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$.

Méthode 2 pour montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:
Écrire F sous la forme $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$

Exercice 15. Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x + 2y - z = 0\right\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Différentes écritures d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$:

- Écriture vectorielle : $F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$.
- Écriture paramétrique : $F = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k, \; (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k\}$.
- Écriture cartésienne : $F = \{(x_1, \ldots, x_n)$ tel que *système d'équations*$\}$.

Il faut savoir passer de l'une aux autres sans difficulté.

- **Les écritures paramétriques et vectorielles** sont pratiquement les mêmes.
- **Passage de l'écriture cartésienne à l'écriture vectorielle**
  - ⋆ on écrit le système d'équations cartésiennes et on l'échelonne ;
  - ⋆ on obtient l'écriture paramétrique de F ;
  - ⋆ on en déduit l'écriture vectorielle de F.
- **Passage de l'écriture vectorielle à l'écriture cartésienne** = Recherche d'équations définissant F
  - ⋆ $u(x, y, z, t) \in F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \;\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3, \quad u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$
  - ⋆ on écrit cette égalité sous forme de système dont les inconnues sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
  - ⋆ on cherche à savoir si ce système est compatible :
    - ∘ on échelonne ce système
    - ∘ on obtient les conditions de compatibilité sur les coordonnées de u pour que le système soit compatible.
  - ⋆ cela nous donne les équations caractérisant F.

Exemple. On donne les 3 écritures pour un exemple particulier :

- Écriture cartésienne : $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x + y - 3z = 0\right\}$.
- Écriture vectorielle : $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (3, 0, 1))$.
- Écriture paramétrique : $F = \left\{(-\lambda + 3\mu, \lambda, \mu); \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 16.
1. Soit $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\right\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$ et donner ses écritures paramétrique et vectorielle.
2. Soient $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 2, -3, 4)$, $e_2 = (2, 1, -1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, 2, 1)$. Montrer que F est un sev et donner ses écritures paramétrique et cartésienne.
3. Soit $F = \left\{(a - 4b, a + b, 2a - b); \; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un ev et donner ses écritures vectorielle et cartésienne.

III Familles génératrices, libres et bases

III. 1 Familles génératrices d'un sev de $\mathbb{K}^n$

Définition 17. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ une famille de vecteurs de F.

- On dit que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est génératrice de F si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F$
- $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ est une famille génératrice de $F \iff \forall w \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$,

$$w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

Exemples.
- Famille génératrices de $F = \text{Vect}(u)$: $\mathcal{F}_1 = (u), \mathcal{F}_2 = (2u), \mathcal{F}_3 = (u, 2u, 12u)$
- Famille génératrices de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{F}_1 = ((1,0),(0,1))$, $\mathcal{F}_2 = ((0,0),(1,0),(0,1),(28,45))$, $\mathcal{F}_3 = ((1,1),(2,1))$
- Famille génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F}_1 = (1, X, X^2)$ $\mathcal{F}_2 = (2, X+1, X^2+2X)$

- **Trouver une famille génératrice d'un sev F** = Écrire F sous forme vectorielle.

- **Montrer qu'une famille donnée $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ est bien une famille génératrice de F :**
  - ⋆ On commence par vérifier que tous les vecteurs $e_1, \dots e_k$ sont bien dans F.
  - ⋆ On prend un vecteur quelconque u dans F, et on cherche s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que u s'écrit comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_k)$, c'est-à-dire tels que $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$.
  - ⋆ On écrit le système linéaire que l'on obtient, et on l'échelonne.
  - ⋆ S'il est compatible, u est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_k)$ et donc $(e_1, \dots e_k)$ est une famille génératrice.

Exercice 18.
1. Exercice de type 1 : trouver une famille génératrice.
   Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x + 2y - z = 0\}$, $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x - y + 2z + t = 0 \text{ et } y + z + t = 0\}$ et $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 4$
   Montrer que ce sont des sev et trouver une famille génératrice de ces 3 sev.
2. Exercice de type 2 : montrer qu'une famille est bien une famille génératrice.
   (a) Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\}$, et soient $u = (1,-1,0)$, $v = (2,0,-1)$ et $w = (0,2,-1)$. Montrer que la famille (u,v,w) est une famille génératrice de F.

   (b) Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z - t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$, et soient $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_2 = (0,1,0,1)$. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de G.

Proposition 19. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$. Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ une famille génératrice de F.
- La famille reste génératrice si on multiplie les vecteurs par des scalaires NON NULS.
- La famille reste génératrice si on ajoute un vecteur à un autre.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice.

Exemples. Soit $F = \text{Vect}(u,v)$ c'est-à-dire $F = \{au + bv \mid a, b \in \mathbb{K}\}$
- $\text{Vect}(-2u, 6v) = \text{Vect}(u,v)$
- $\text{Vect}(u, v + 3u) = \text{Vect}(u,v)$
- Soit $w \in F$: $\text{Vect}(u,v,w) = \text{Vect}(u,v)$

III. 2 Familles libres d'un sev de $\mathbb{K}^n$

Définition 20. Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ une famille de vecteurs d'un sev de $\mathbb{K}^n$.

- On dit que c'est une famille libre si il n'y a pas de combinaisons linéaires non triviales entre les vecteurs :

  $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$ on a

  $$(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) = (0, \ldots, 0)$$

- On dit encore que les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$ sont linéairement indépendant
- Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Exemples.

- Famille libre de $\mathbb{R}^2$: $((1,2))$
- Famille liée de $\mathbb{R}^2$: $((1,2),(2,1)(3,3))$
- Famille libre de $\mathbb{R}$: (1)

1. Méthode pour montrer qu'une famille est libre :
   - Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{K}^n}$.
   - On écrit le système linéaire associé à $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{K}^n}$.
   - On l'échelonne, on le résout et on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.
2. Méthode pour montrer qu'une famille est liée et trouver les relations de liaison :
   - Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{K}^n}$.
   - On écrit le système associé et on l'échelonne.
   - On prend alors des valeurs particulières pour les inconnues secondaires, et on calcule des solutions particulières du système.
   - En remettant dans l'égalité $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{K}^n}$, on obtient les relations de liaison.

Exercice 21.

1. La famille $((1,1,1),(1,2,1),(3,1,0))$ est-elle libre ?
2. La famille (u,v,w) avec $u = (1,2,3,5)$, $v = (0,1,3,2)$ et $w = (3,2,0,0)$ est-elle libre ?
3. La famille $((1,2),(3,4),(5,6))$ est-elle libre ?
4. On admet que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = I_2$. La famille (A,B,C) est-elle libre ?

Exemples.

- Famille de 1 seul vecteur $u \in \mathbb{K}^n$:
  (u) est une famille libre $\iff u \neq 0$
- Famille de 2 vecteurs (u,v) :
  (u,v) est une famille libre $\iff u$ et v ne sont pas colinéaires.
- Famille de 3 vecteurs ou plus :
  ⚠ Le lien entre colinéarité et famille libre n'est plus vrai à partir de 3 vecteurs. Une famille peut très bien être liée même si les 3 vecteurs sont deux à deux non colinéaires.
  Exemple : $((1,2,3),(2,1,1),(3,3,4))$

Proposition 22. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- La famille reste libre si on multiplie les vecteurs par des scalaires NON NULS.
- La famille reste libre si on ajoute un vecteur à un autre.
- Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.

Proposition 23. La famille $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si l'écriture d'un vecteur de $Vect(\mathcal{F})$ avec des vecteurs de $\mathcal{F}$ est unique. c'est-à-dire si et seulement si à chaque fois que l'on a deux combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_p)$ égales, alors leurs coefficients respectifs sont égaux deux à deux :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i e_i \Rightarrow \lambda_i = \beta_i$$

III. 3 Bases d'un sev de $\mathbb{K}^n$

Définition 24. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ et soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de F.

- On dit que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F si libre et génératrice
- On dit que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F si

$$\forall u \in F, \exists ! ...$$

Exemples.
- Base de $F = \mathrm{Vect}(u)$: (u)
- Base de $\mathbb{R}^2$: $((1,1),(1,0))$
- Base de $\mathbb{R}_3[X]$: $((1,2,0),(1,0,2),(0,0,1))$
- Base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 25. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- On définit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ par $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est à la i-ème coordonées.
- $\mathcal{B}$ est une base. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Exemples.
- La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1,0),(0,1))$
- La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

Méthodes pour trouver une base d'un sev :
1. Méthode 1 : lorsque F est sous forme cartésienne :
   - On met F sous forme vectorielle et on obtient ainsi une famille génératrice de F.
   - On vérifie que la famille trouvée est bien une famille libre.
   - On conclut que la famille trouvée est bien une base de F.
2. Méthode 2 : lorsque F est sous forme vectorielle :
   - On connaît déjà une famille génératrice.
   - On étudie la liberté de la famille :
     - ⋆ si elle est libre, c'est une base de F.
     - ⋆ si elle est liée, on trouve les relations de liaison entre les différents vecteurs puis on enlève tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 26.
1. Exercice type 1 : lorsque F est sous forme cartésienne :
   (a) Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y - 3z = 0 \text{ et } 3x - 2y - 4z = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en trouver une base.
   (b) Soit $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z + t = 0 \text{ et } 3x - 2z + t = 0\}$. Montrer que H est un sev de $\mathbb{R}^4$ et trouver une base.
   (c) Déterminer une base de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y - 6z = 0\}$

(d) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$ et soit $u = (-2, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1)$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (u, v) est une base du sev F.

2. Exercice type 2 : lorsque F est sous forme vectorielle :

   (a) Trouver une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, -1, -2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_4 = (1, 4, 7, 10)$.

   (b) Trouver une base de $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1 = (-1, 1, 2)$, $u_2 = (2, 4, -1)$, $u_3 = (5, 7, -4)$ et $u_4 = (-13, -23, 11)$.

Proposition 27. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F.

- On a pour tout $u \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i$$

- Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$
- La matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ est appelée la matrice coordonée de u.

Remarque. Dans $\mathbb{K}^n$, il est très facile de trouver la matrice des coordonnées dans la base canonique.

- Soit le vecteur $\vec{u}(2, -3, 6)$. Sa matrice des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Généralisation : pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, la matrice des coordonées de ce vecteur dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

Méthode pour trouver la matrice des coordonées du vecteur u dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ d'un sev F.

Chercher $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que : $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \ldots \lambda_p e_p$, et résoudre le système associé.

Exercice 28. 1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$. Montrer que $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$ est un base de F, et trouver la matrice des coordonnées de $u = (2, 2, -1)$ dans cette base.

2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\quad x + y - 2z = 0\}$. Montrer que (u, v) avec $u = (1, -1, 0)$ et $v = (2, 0, 1)$ est une base de F. Donner la matrice des coordonnées de $U = (1, 3, 2)$ dans cette base. Faire de même avec $V = (0, 4, 2)$.
3. On admet que $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{K}$. Trouver la matrice des coordonnées de $P = (X - 1)(X + 2)$ dans cette base.

IV Espaces vectoriels de dimension finie

IV. 1 Dimension d'un sev de $\mathbb{K}^n$

Théorème 29. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ ($F \neq \{0\}$). Alors

- Toutes les bases de F ont le même cardinal.
- Ce nombre est appelé dimension de F.

Exemples. • $\dim \mathbb{K}^n = n$

- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- Par convention, $\dim(\{0\}) = 0$
- Si $\dim F = 1$, on dit que F est une droite
- Si $\dim F = 2$, on dit que F est un plan
- Si F est un sev de $\mathbb{K}^n$ avec $\dim F = n-1$, on dit que F est un hyperplan. Par exemple, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans.

Méthode pour calculer la dimension d'un sev :
- On trouve une base de F.
- On compte le nombre de vecteurs de la base et cela nous donne la dimension.

Exercice 30.
1. Calculer la dimension de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$.
2. Calculer la dimension de $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y - z - t = 0,\ x - y + z + t = 0,\ 3y - 2z - 2t = 0\}$
3. Calculer selon a la dimension de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x + y + z - t = 0,\ x - y + z + t = 0,\ x + 2y - at = 0\}$
4. Calculer la dimension de $H = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ avec $u_1(3, 0, 4, 1)$, $u_2(0, 1, 2, 1)$, $u_3(-5, 0, -2, 3)$ et $u_4(2, 1, 2, -1)$.
5. Calculer la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 31. Soient F et G deux sev de $\mathbb{K}^n$.

- Si $F \subset G$. Alors $\dim(F) \leq \dim(G)$
- Si on a :
  - $\star$ $F \subset G$
  - $\star$ $\dim(F) = \dim(G)$

  Alors $F = G$.

Méthodes pour montrer une égalité entre deux sev :
1. Méthode 1 : par double inclusion.
2. Méthode 2 : Pour montrer que $F = G$, on montre :
   - $F \subset G$
   - $\dim F = \dim G$.

Exercice 32. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 2)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que $F = \mathbb{R}^3$.

IV. 2 Dimension et familles libres, génératrices, bases

Proposition 33. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ **de dimension p**.
1. Cas des familles libres :
   - Toute famille libre dans F admet au plus p vecteur $\Longleftrightarrow$ Toute famille ayant $p+1$ éléments ou plus est liée
   - Toute famille libre dans F ayant exactement p vecteur est une base.
   - Toute famille libre dans F peut être agrandie en une base.
2. Cas des familles génératrices :
   - Toute famille génératrice de F admet au plus p vecteur s $\Longleftrightarrow$ Toute famille ayant strictement moins de p éléments n'est pas génératrice de F
   - Toute famille génératrice de F ayant exactement p vecteur est une base.
   - Toute famille génératrice de F contient une base.

Méthode pour trouver une base de F lorsque l'on connaît la dimension de F :
Si on sait que $\dim F = p$, il suffit de trouver :

- Cas le plus courant : Une famille libre de F avec p vecteurs et c'est alors une base. (On n'a pas besoin dans ce cas de vérifier qu'elle est génératrice de F.)
- Cas plus rare : une famille génératrice de F avec p vecteurs et c'est alors une base. (On n'a pas besoin dans ce cas de vérifier qu'elle est une famille libre.)

Exercice 34. 1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1(1,2,1)$, $u_2(1,0,-1)$ et $u_3(1,1,1)$.

2. Montrer que $\mathcal{B} = (u(1,2,3,4), v(1,1,2,3), w(1,1,1,2), U(1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 35. Répondre aux questions suivantes sans faire aucun calcul :

1. La famille (u,v) avec $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,1)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. Soient $u = (1,2)$, $v = (3,4)$ et $w = (5,6)$. La famille est-elle libre ?
3. On se place dans $\mathbb{R}^4$. Dire à chaque fois si la famille donnée peut être libre, génératrice de $\mathbb{R}^4$, base de $\mathbb{R}^4$ ou aucun des trois :
   - ⋆ La famille (v_1, v_2, v_3).
   - ⋆ La famille (v_1, v_2, v_3, v_4).
   - ⋆ La famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
   - ⋆ La famille $(v_1, 2v_1, v_2)$.
   - ⋆ La famille $(v_1, 2v_1, v_2, v_3, v_4)$.

IV. 3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 36. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

Exercice 37. Trouver le rang des deux familles de vecteurs suivantes :

1. La famille (u, v, w) avec $u = (1,2,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (1,0,-1)$.
2. La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ avec $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (0,-1,0,1)$ et $u_3 = (0,0,-1,1)$, $u_4 = (-1,2,1,0)$ et $u_5 = (1,-1,1,2)$.

Proposition 38. Propriétés sur le rang :

- Le rang d'une famille de p vecteurs est toujours inférieur ou égal à p.
- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $rg((u_1, \dots, u_p)) = p$

Lien avec le rang d'un système linéaire et d'une matrice
Rappels :

- On appelle rang d'un système linéaire échelonné le nombre de lignes non triviale du système (échelonné)
- On appelle rang d'un système linéaire le rang d'un système échélonné qui lui est équivalent.
- Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est égal au rang du système associé $AX = 0$

Exercice 39. Calculer le rang du système suivant : $(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & y & & & + & t & & & = & 2 \\ & - & y & + & 4z & - & t & + & 6w & = & 10 \\ & & & & 2z & & & + & 3w & = & 6 \end{array} \right.$

Exercice 40. Calculer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Définition 41. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

- Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(u_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.
- La matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ notée $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ est définie par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Exercice 42. 1. Écrire la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (1, 5, 8)$, $u_2 = (-7, 4, -10)$, $u_3 = (9, 2, -1)$ et $u_4 = (0, -1, -2)$.

2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice dans cette base de la famille (u, v, w) avec $u(1, 2)$, $v(0, -1)$ et $w(4, 7)$.

Proposition 43. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^n$, $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$. ALors le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$

Méthode 1 pour trouver le rang d'une famille de vecteurs :

- Calculer la dimension de $\overrightarrow{(u_1, \dots, u_p)}$.

Méthode 2 pour trouver le rang d'une famille de vecteurs :

- Écrire la matrice de la famille de vecteurs dans la base canonique.
- Calculer le rang de la matrice avec la méthode du pivot de Gauss.
- Le résultat trouvé est le rang de la famille de vecteurs.

Exercice 44. 1. Calculer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 2)$.

2. Calculer le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ avec $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, -2, 4, -6)$, $u_3 = (1, -3, -1, 1)$, $u_4 = (0, 1, 0, 3)$ et $u_5 = (-1, 2, 0, 0)$.