Programme de colle : Semaine 24
Lundi 10 avril

I DL

1. Taux d'accroissement et dérivation.
2. Preuve des équivalents usuels à l'aide des taux d'accroissement
3. Lien entre $o()$ et $\sim$
4. Formule de Taylor-Young
5. DL des fonctions usuelles en 0
6. DL d'un produit, d'une somme, d'une composée...
7. Utilisation des DL pour trouver des limites/des équivalents.

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Algorithme de dichotomie.

III Exercices Types

1. Calculer la limite de $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1}$ quand x tend vers 0.
2. Etudier la continuité de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{x - \sin(x)} \quad et \quad f(0) = 0$$

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

   (a) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x + x^2}$ à l'ordre 2

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1

   (d) $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2

   (e) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3

   (f) $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3

   (g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3

   (h) $f(x) = (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

4. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

(a) $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$

(b) $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$

(c) $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$

(d) $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$

(e) $x \mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$

(f) $x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$

(g) $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$ en $a = \dfrac{1}{2}$

(h) $x \mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$ en $a = +\infty$

5. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.
   (a) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
   (b) Ce prolongement est-il dérivable ?
   (c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
   (d) Ce prolongement est-il dérivable ?