Programme de colle : Semaine 25
Lundi 17 avril

I DL

1. Taux d'accroissement et dérivation.
2. Preuve des équivalents usuels à l'aide des taux d'accroissement
3. Lien entre $o()$ et $\sim$
4. Formule de Taylor-Young
5. DL des fonctions usuelles en 0
6. DL d'un produit, d'une somme, d'une composée...
7. Utilisation des DL pour trouver des limites/des équivalents.

II Espaces Vectoriels

On ne considére seulement l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les sev de $\mathbb{K}^n$.

1. Savoir vérifier qu'un sous-ensemble est un sev de $\mathbb{K}^n$.
2. Notion de famille de vecteurs et de sev engendré par une famille de vecteurs $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$
3. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs.
4. Passer d'une écriture cartésienne à une écriture paramétrique.
5. Famille libre, génératrice d'un sev, base.
6. Dimension.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Algorithme de dichotomie.

IV Exercices Types

1. Calculer la limite de $\frac{\sin(x^2)}{\cos(x)-1}$ quand x tend vers 0.
2. Etudier la continuité de la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x^2}{x - \sin(x)} \quad et \quad f(0) = 0$$
3. Dans chacun des cas suivants, déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage de 0 à l'ordre donné :

(a) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre 2

(b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x+x^2}$ à l'ordre 2

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ à l'ordre 1

(d) $f(x) = 2^x - 1$ à l'ordre 2

(e) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3

(f) $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3

(g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$ à l'ordre 3

(h) $f(x) = (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3

4. Dire si les fonctions suivantes ont une limite au point a et si oui les déterminer.

(a) $x \mapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$ en $a = 0$

(b) $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ en $a = 0$

(c) $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$ en $a = 0$

(d) $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^2$ en $a = +\infty$

(e) $x \mapsto \left(\dfrac{3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{\ln x}$ en $a = +\infty$

(f) $x \mapsto \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$ en $a = 0$

(g) $x \mapsto (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$ en $a = \dfrac{1}{2}$

(h) $x \mapsto \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right]\ln x$ en $a = +\infty$

5. Soit la fonction f définie sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$.
   (a) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
   (b) Ce prolongement est-il dérivable ?
   (c) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
   (d) Ce prolongement est-il dérivable ?
6. L'ensemble F suivant est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\right\}.$$

7. Trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel suivant

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$$

8. Donner l'écriture cartésienne de l'espace vectoriel suivant $E = \text{Vect}(u,v)$ avec $u = (1,2,2)$ et $v = (2,1,3)$.
9. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m,1,m)$ appartient à $\text{Vect}(v,w)$ avec $v = (1,1,1)$ et $w = (1,m,-1)$.
10. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\right\}.$$

11. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
    (a) $u = (1,-1,0)$, $v = (2,1,-1)$ et $w = (1,5,-1)$
    (b) $u = (1,1,2)$, $v = (2,1,0)$ et $w = (3,1,\lambda)$ λ paramètre réel.
    (c) $u = (1,0,-2)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (4,-2,1)$
    (d) $u = (1,1,-1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (-1,1,1)$ et $t = (1,1,1)$