DM 13

Exercice 1. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $P_{Z_p = k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

(b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Correction 1.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Étude du cas $c=0$. On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

— $Y=k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{ième}$ tirage.

— $Y=0$ si les n boules tirées sont noires.

1. On effectue n tirages indépendants (le contenu de l'urne ne change pas) pour lesquels la probabilité d'obtenir *blanc* est toujours $1/2$ (boules équiprobables). Donc $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1/2)$ et $E(X)=n/2$ et $V(x)=n/4$
2. Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, $(Y=k)$ signifie qu'on obtient B pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Donc que l'on a eu N pour les tirages précédents

$$(Y=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1}N_i\cap B_k$$

et les tirages étants indépendants, .

$$p(Y=k)=\prod_{i=1}^{k-1}p(N_i)\cdot p(B_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$(Y=0)$ signifie qu'il n'y a eu que des N lors des n tirages. Et donc $P(Y=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3. Pour calculer cette somme, il faut traiter à part la valeur $k=0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}p(Y=k) &= \sum_{k=1}^{n}P(Y=k)+p(Y=0)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

4. On le démontre par récurrence : Pour $x\neq 1$

— Pour $n=1$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} kx^k &= x \text{ et}\\ \frac{1x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2} &= x\frac{x^2-2x+1}{(1-x)^2}=x\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)\,x^{n+1}\\ &= (n+1)\,x^{n+1} + \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+1}(1-x)^2 + nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+1} - 2\,(n+1)\,x^{n+2} + (n+1)\,x^{n+3} + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)\,x^{n+3} + -(n+2)\,x^{n+2}+x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

— Donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$

5. On a alors

$$\begin{aligned}E\,(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k\cdot p\,(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot P(Y=k) + 0\cdot p\,(Y=0)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}\\ &= 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}\right)\\ &= -\,(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+2\end{aligned}$$

Étude du cas $c \neq 0$. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par :

— $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$tirage

— $X_i = 0$ sinon

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. X_i compte le nombre de boule(s) balnches obtenue au $i^{ème}$ tirage (uniquement). Z_p est donc le nombre total de boules blanches obtenues lors des p premiers tirages.

2. Au premier tirages, les 2 boules sont équiprobables. Donc $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et $p(X_1 = 1) = p(X_2 = 1) = 1/2$ et X_1 suit une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$. On a don $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/4$
3. Il y a ici 4 probabilités à déterminer en décomposant en fonction du résultat de chacun des deux premiers tirages :
   — $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (N_1 \cap N_2)$ donc $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)\, p(N_2/N1)$.
   Quand on a N_1 on rajoute alors c boules Noires. Il y a donc 1 blanche et c+1 noirs lors du second tirage. Ces boules étant équiprobables :
   $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$
   — De même $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)\, p(B_2/N1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$
   — $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(B_1 \cap N_2) = p(B_1)\, p(N_2/B_1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2}$
   — et enfin $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)\, p(B_2/B1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$

   La loi de X_2 est la loi marginale :
   — $p(X_2 = 0) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$
   — $p(X_2 = 1) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{2}$

   La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1 et $E(X_2) = E(X_1) = 1/2$
4. Ici Z_2 est la somme de deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre de succès. **Mais** elles ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2)$
   — $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
   — $(Z_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ et $p(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$ (d'après la loi du couple)
   — $(Z_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ et comme ces deux parenthèses sont incompatibles :
   $p(Z_2 = 1) = p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$
   — $(Z_2 = 2) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ et $p(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c+1}{c+2}$.
5. On peut avoir en p tirages de 0 à p boules blanches. Donc $Z_p(\Omega) = [[0, p]]$
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Quand $(Z_p = k)$ on a obtenu k boules blanches et $p - k$ boules noires. On a donc rajouté lors de ces tirages $k \cdot c$ boules blanches et $(p - k)\, c$ boules noires.
   Il y a donc $k \cdot c + 1$ blanches et $(p - k)\, c + 1$ noires lors du $p + 1^{ième}$ tirages.
   Ces boules étant équiprobables
   $$p(X_{p+1} = 1\, /Z_p = k) = \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2}$$
   (b) Les événements $(Z_p = k)_{k \in [[0,p]]}$ forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} p(X_{p+1} = 1\, /Z_p = k) p(Z_p = k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) \dots \end{aligned}$$

Mais on ne connaît pas la loi de $Z_p \ldots$ Aussi ne fait on apparaître que son espérance :

$$\begin{aligned}
p\left(X_{p+1}=1\right) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c+1}{p \cdot c+2} p\left(Z_p=k\right)=\frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{p}(k \cdot c+1) p\left(Z_p=k\right) \\
&= \frac{1}{pc+2}\left[c \sum_{k=0}^{p} kp\left(Z_p=k\right)+\sum_{k=0}^{p} p\left(Z_p=k\right)\right] \\
&= \frac{1}{pc+2}\left[cE\left(Z_p\right)+1\right]=\frac{cE\left(Z_p\right)+1}{2+pc}
\end{aligned}$$

(c) On en déduit par récurrence que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

— Pour $p=1$, X_1 suit bien une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$

— Soit $p \geq 1$ tel que pour tout $k \in [[1,p]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$
Alors $E\left(Z_p\right)=\sum_{k=1}^{p} E\left(X_i\right)=p/2$
et

$$\begin{aligned}
p\left(X_{p+1}=1\right) &= \frac{cE\left(Z_p\right)+1}{2+pc}=\frac{\frac{cp}{2}+1}{2+pc}=\frac{cp+2}{2(cp+2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et donc $p\left(X_{p+1}=0\right)=1-p\left(X_p=1\right)=\frac{1}{2}$
Donc X_{p+1} suit une loi binomiale de paramètre $1/2$

— Donc pour tout entier $p \geq 1$: X_p suit une loi binomiale de paramètre $1/2$.