TD : Applications linéaires

I Applications linéaires

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f de E dans F est une application linéaire.

1. $f(x,y) = (x-y, x, 2x+y)$
2. $f(x,y) = (y, x^2)$
3. $f(x) = |x|$
4. $f(x,y,z,w,t) = (y+t, 0, 2x-3y+1)$
5. $f(x,y) = (x+y, \sqrt{x^2+y^2})$
6. $f(x,y) = (\sin(x+y), x)$

Exercice 2. Pour quelles valeurs du paramètre réel m l'application f est-elle linéaire avec f définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-m+4(y-m)+5(z-m), 2(x+2m)+5(y+m)+7z, 3x+6y+9z+3m)\,.$$

II Noyau, image, injectivité, surjectivité, isomorphisme

Exercice 3. Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.

1. $f(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z)$
2. $f(x,y) = (4x+y, x-y, 2x+3y)$
3. $f(x,y,z) = (2x+y+z, x-y+2z, x+5y-4z)$
4. $f(x,y,z) = (y, 0, x+z, 3x+y-2z)$
5. $f(x,y) = (2x-3y, x-y, x+2y)$
6. $f(x,y,z) = (z, x-y, y+z)$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 - 3f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Soit g un endomorphisme de E tel que : $g^3 - g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et tel que $g \neq Id_E$. Montrer que g n'est pas bijectif.

Exercice 5. Soit l'application f définie par : $f(x,y,z) = (3y-2z, -x, 4y+3z)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.

III Applications linéaires et matrices

Exercice 6. Soient les vecteurs $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base (u,v).
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2,1)$ et $f(v) = (1,-1)$. Déterminer $f(x,y)$.
4. Pour quelles valeurs du paramètre réel a existe-t-il une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $g(u) = (2,1) \qquad g(v) = (1,-1) \qquad g(w) = (5,a)$?

Exercice 7. On considère f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices relativement à la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner une base de $\operatorname{Im} f$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im} g$.
3. On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?

Exercice 8. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit surjective ? Injective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = (2e_1 - 5e_2 - 8e_3)$ et $f(e_3) = (-e_1 + 4e_2 + 6e_3)$.

1. Donner l'expression de $f(x, y, z)$
2. Déterminer $\ker(f - Id_E)$ et en donner une base et la dimension.
3. Déterminer $\ker(f^2 + Id_E)$ et en donner une base et la dimension.
4. Montrer que $\ker(f - Id_E) \cap \ker(f^2 + Id_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Exercice 10. On considère l'application linéaire définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2y - 3z, -2x + 4y - 5z, z).$$

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M de f relativement à $\mathcal{B}$.
2. On pose : $f_1 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
3. On appelle matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$. Si un vecteur u a pour vecteur coordonnées X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$, on a $X = PX'$. Déterminer $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}}$ matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$.
4. Vérifier que : $PNP^{-1} = M$. Retrouver ce résultat sans calcul (remarquer que : $P^{-1} = P_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}}$).

Exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \; f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n, x_2 + \cdots + x_n, \ldots, x_n).$$
Montrer que f est bijective et donner l'expression analytique de sa réciproque.
2. En déduire que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 12. Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $h(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$.

1. Donner la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\ker h$. Quel est le rang de h ? Donner une base de $\operatorname{Im} h$.
3. Déterminer la matrice de $h^2 = h \circ h$. Quel est le rang de h^2 ? Son noyau ? Son image ?
4. Calculer h^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice relativement à la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base. Que remarquez-vous ?

Exercice 14. Soit $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M.

1. Soit $u = (1,2,-1)$. Montrer que (u) est une base de $\ker f$.
2. Soient $v = (1,0,-1)$ et $w = (1,-1,0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.
3. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base.
4. Montrer que $\operatorname{Im} f = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
2. Déterminer une base de $\ker f^2$ et une base de $\operatorname{Im} f^2$.
3. Déterminer A^3. Que peut-on en déduire pour $\ker f^3$ et $\operatorname{Im} f^3$?

IV Applications linéaires et rang

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.

1. Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le rang de f, une base et la dimension de son noyau, une base de l'image.

Exercice 17. Pour chacune des matrices suivantes, on note f l'application linéaire canoniquement associé. Donner le rang, une base et la dimension du noyau et de l'image de f. On précisera lorsque f est injective, surjective ou un automorphisme ou isomorphisme.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associée aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...)

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer le rang de f. En déduire le noyau et l'image de f.
2. f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.
3. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$.
4. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(f + Id_{\mathbb{R}^3})^n$.

V Exercices plus abstraits

Exercice 20. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.
2. Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 21. Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(x_1, \dots, x_r)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que

1. Si $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est libre, alors $(x_1, \dots x_r)$ est libre.
2. Si $(x_1, \dots, x_r)$ est libre et f injective, alors $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est libre.
3. Si $(x_1, \dots x_r)$ est une famille génératrice de E et f surjective, alors $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est une famille génératrice de F.
4. Si $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est une famille génératrice de F et f injective alors $(x_1, \dots, x_r)$ est une famille génératrice de E.
5. f est bijective si et seulement si l'image de toute base de E par f est une base de F.

Exercice 22. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 23. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, on a : $\operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f$ et $\ker(\lambda f) = \ker f$.

Exercice 24. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f \circ f = f^2$. Montrer que

$$\ker(f^2) = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}.$$

Exercice 25. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée.

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$. (On pourra considérer $e_1 + e_i$).
2. Montrer que f est soit identiquement nulle, soit une homothétie vectorielle.

Exercice 26. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f dans cette base.