TD 20 : Variable Aléatoire Réelle

I Calculs de lois, fonctions de répartition, espérance et variance

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2. On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.

1. Calculer la loi de X. Représenter cette loi par un tableau puis par un diagramme en bâtons.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Déterminer la loi de la varf $Y = (X-3)^2$.
5. On considère $g : x \mapsto \cos(\pi x)$ et on pose $Z = g(X)$. Déterminer l'espérance de la varf Z.

Exercice 3. La loi de probabilité d'une var X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P([X = x_i])$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

1. Tracer le diagramme en bâtons de X.
2. Donner sa fonction de répartition et en donner le graphe.
3. Calculer $P([X < 0])$, $P([X > -1])$, $P([-3,5 < X \leq -2])$.
4. Donner sous forme d'un tableau la loi de probabilité des variables suivantes : $|X|$, $Y = X^2+X-2$, $Z = \min(X,1)$, $T = \max(X, -X^2)$.

Exercice 4. Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et X une varf à valeurs dans $[\![0,3]\!]$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$P([X=0]) = P([X=3]) = \theta \quad P([X=1]) = P([X=2]) = \frac{1}{2} - \theta.$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 6. On considère un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. Soit X la varf égale au numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer la loi de Y et $E(Y)$.
3. Faire de même avec les varf $Z = (X-2)(X-5)$ et $T = \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$.

Exercice 7. Un tireur doit toucher n cibles ($n \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k-ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p_k \in]0,1[$. On note X le nombre de cibles touchées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $p_k = p$.
   (a) Déterminer la loi de X en fonction de p et de $q = 1 - p$.
   (b) Pour tout $t \in [0,1]$, on définit la fonction génératrice associée à X par : $G_X(t) = E(t^X)$. Justifier que $G'_X(1) = E(X)$ et en déduire l'espérance de X ainsi que la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = 0 \text{ sur }]-\infty,-2[,\ \frac{1}{4} \text{ sur } [-2,0[,\ \frac{1}{2} \text{ sur } [0,3[,\ \frac{2}{3} \text{ sur } [3,4[,\ 1 \text{ sur } [4,+\infty[.$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une varf ayant F pour fonction de répartition. Calculer alors $P([X \leq 1])$, $P([X < 1])$ et $P([-2 \leq X \leq 0])$.
3. Déterminer aussi la loi de X, son espérance et sa variance.
4. Soit Y et Z les varf définies par $Y = \dfrac{X}{2}$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Exercice 9. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geq 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n \geq 2$.
   (a) Justifier que $Y_n \leq N - 1$.
   (b) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, on a
   $$P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N} P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(Y_{n-1} = k+1).$$
3. En déduire que la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $E(Y_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10. Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et face avec probabilité $\dfrac{2}{3}$. Il lance le dé n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.

1. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note p_n la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieure à 0.1. Calculer le nombre de lancers n à effectuer pour que p_n soit inférieure à 0.2.

II Reconnaître les lois usuelles

Exercice 11. 1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(q)$ avec $q \in \mathbb{N}^\star$ telle que $E(X) = 5$. Déterminer q.

2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$ telle que $E(X) = \sigma(X) = \dfrac{3}{4}$. Déterminer n et p.
3. Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{H}(15,n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$ telle que $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{5}{14}$. Déterminer n et p.
   On donne la variance de la loi hypergéométrique : $np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

Exercice 12. Pour chacune des variables aléatoires décrites ci-dessous, donner la loi exacte, l'espérance et la variance :

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7.
2. On tire 8 cartes d'un jeu de 52 et on s'intéresse au nombre de carreaux.
3. On lance 5 dés.
   (a) On s'intéresse au nombre de 6.
   (b) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé.
4. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51.
5. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote.
6. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objets dans le premier tiroir.
7. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard. Nombre de voyelles dans ce mot.
8. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses.
9. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 1000 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
10. Dans une population de 20 personnes, dont 8 hommes, nombre de femmes présentes dans une délégation de 6 personnes tirées au sort.
11. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue.

Exercice 13. On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne et on note X le nombre de boules bleues obtenu. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. On réalise 3 tirages successifs avec remise et on note Y le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
3. On réalise 3 tirages successifs sans remise et on note Z le nombre de boules bleues obtenu au cours de ces tirages. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
4. On tire une boule de l'urne et on note T le numéro de la boule obtenue. Donner la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 14. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2 km à la vitesse de 10km/h. Il doit franchir 10 obstacles indépendants les uns des autres. La probabilité de franchir un obstacle est de $\frac{3}{5}$.

1. On note X la varf qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier. Déterminer la loi, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.
2. On suppose que si le cavalier franchit un obstacle sans faute, il ne perd pas de temps et qu'il perd 30 secondes sinon. Calculer le temps moyen d'un parcours.

III Exercices généraux

Exercice 15. Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit X_i la varf de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $P([X_{i+1} = 1])$ et $P([X_i = 1])$.

2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$.
3. Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.

Exercice 16. On lance m dés non truqués numérotés de 1 à m.

1. Soit X_1 la var égale au nombre de dés amenant le 6. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors du deuxième lancer. Calculer $P(X_2 = k)$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$. En déduire la loi de X_2 son espérance et sa variance.
   On pourra montrer en particulier que : $\binom{m}{i}\binom{m-i}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{i}$.
3. On poursuit l'expérience précédente : à chaque lancer, on relance uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 aux lancers précédents. Soit X_n la varf égale au nombre de dés amenant 6 au n-ième lancer.
   (a) Soit $Z_{i,n}$ la var valant 1 si le dé numéroté i donne 6 au n-ième lancer et 0 sinon. Calculer la loi de $Z_{i,n}$.
   (b) Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Exercice 17. Dans un jeu télévisé, le candidat doit répondre à 20 questions. Pour chacune d'elles, l'animateur propose au candidat trois réponses possibles, une seule étant la réponse exacte. Les questionnaires sont établis de façon que l'on puisse admettre que :

- un candidat retenu pour participer au jeu connaît la réponse exacte pour 60% des questions et donne une réponse au hasard pour les autres;
- les questions posées lors du jeu sont indépendantes.

1. On considère l'événement E_i : le candidat donne la réponse exacte à la i-ème question. Calculer $P(E_i)$.
2. On note X la varf égale au nombre de réponses exactes données par le candidat aux 20 questions du jeu. Donner la loi de probabilité de X.
3. Quel est le nombre moyen de bonnes réponses données par le candidat ?

Exercice 18. Une puce se déplace sur un axe par sauts indépendants et d'amplitude 1, aléatoirement vers la gauche ou la droite. Soit X_n sa position après n sauts (elle commence à la position 0). Soit Y_n le nombre de fois où elle a sauté vers la droite au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi de Y_n.
2. Après avoir exprimé X_n en fonction de Y_n, donner la loi de X_n.
3. On suppose que n est pair. Quelles est la probabilité p_n que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? Etudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On admettra la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

Exercice 19. Une urne contient n boules : m sont blanches et les autres sont noires ($1 \leq m < n$). On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on ait obtenu toutes les boules blanches. On note Y le nombre de tirages effectués.

1. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note X_i le nombre de boules blanches obtenues au cours des i premiers tirages. Quelle est la loi de X_i ?
2. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, l'événement $[Y \leq k]$ en fonction de X_k. Calculer alors $P([Y \leq k])$. En déduire la loi de Y.
3. Retrouver le résultat ci-dessus en calculant directement la loi. On pourra exprimer l'évènement $[Y = k]$ avec X_{k-1} et B_k avec B_k l'évènement « tirer une boule blanche au tirage k ».
4. On suppose $m = 1$, donner explicitement la loi de Y. Même question si $m = 2$.

Exercice 20. Deux joueurs jouent n fois chacun à pile ou face.

1. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.
2. Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne un nombre de piles strictement plus grand que l'autre.