TD Application linéaire - correction

I Applications linéaires

Correction 1.

Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f de E dans F est une application linéaire.

1. $\mathbf{f(x,y) = (x-y, x, 2x+y)}$: soient $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $v=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u+v) &= f(\lambda x+x', \lambda y+y') \\ &= (\lambda x+x'-(\lambda y+y'), \lambda x+x', 2(\lambda x+x')+\lambda y+y') \\ &= \lambda(x-y,x,2x+y)+(x'-y',x',2x'+y') = \lambda f(u)+f(v) \end{aligned}$$

   On a donc $\boxed{f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)}$.

2. $\mathbf{f(x,y) = (y, x^2)}$: on se doute que f n'est pas une application linéaire à cause de la présence du x^2 dans son expression. On cherche alors un contre-exemple. Si on prend par exemple $u=(1,0)$ et $\lambda=2$, on obtient : $f(\lambda u)=f((2,0))=(0,4)$ alors que $\lambda f(u)=2\times(0,1)=(0,2)$. Ainsi, $f(\lambda u)\neq\lambda f(u)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.
3. $\mathbf{f(x) = |x|}$: prenons $u=1$ et $\lambda=-1$, on obtient $f(\lambda u)=f(-1)=|-1|=1$, tandis que $\lambda f(u)=-f(1)=-1$. Ainsi, $f(\lambda u)\neq\lambda f(u)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.
4. $\mathbf{f(x,y,z,w,t) = (y+t, 0, 2x-3y+1)}$: on remarque que $f((0,0,0,0,0))=(0,0,1)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi l'application $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.
5. $\mathbf{f(x,y) = (x+y, \sqrt{x^2+y^2})}$: prenons $u=(1,1)$ et $\lambda=-1$, on obtient $f(\lambda u)=f(-1,-1)=(-2,\sqrt{2})$, tandis que $\lambda f(u)=-f(1,1)=-(2,\sqrt{2})=(-2,-\sqrt{2})$. Ainsi, $f(\lambda u)\neq\lambda f(u)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.
6. $\mathbf{f(x,y) = (\sin(x+y), x)}$: prenons $u=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ et $\lambda=2$, on obtient $f(\lambda u)=f(\pi,0)=(0,\pi)$, tandis que $\lambda f(u)=2f\left(\frac{\pi}{2},0\right)=2\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=(2,\pi)$. Ainsi, $f(\lambda u)\neq\lambda f(u)$ et $\boxed{f \text{ n'est pas une application linéaire}}$.

Correction 2.

Pour quelles valeurs du paramètre réel m l'application f est-elle linéaire avec f définie par

$$\forall(\mathbf{x,y,z})\in\mathbb{R}^3,\quad \mathbf{f(x,y,z) = (x-m+4(y-m)+5(z-m), 2(x+2m)+5(y+m)+7z, 3x+6y+9z+3m)}$$

Il faut tout d'abord que l'on ait $f(0,0,0)=(0,0,0)$. Or on a : $f(0,0,0)=(-10m,9m,3m)$. Il est donc nécessaire d'avoir $m=0$.
Pour $m=0$, on a alors $f(x,y,z)=(x+4y+5z, 2x+5y+7z, 3x+6y+9z)$. Vérifions que cette application est lineaire : on prend $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On veut montrer que $f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u+v) &= f(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') \\ &= (\lambda x+x'+4(\lambda y+y')+5(\lambda z+z'), 2(\lambda x+x')+5(\lambda y+y')+7(\lambda z+z'), 3(\lambda x+x')+6(\lambda y+y') - \\ &= \lambda(x+4y+5z, 2x+5y+7z, 3x+6y+9z)+(x'+4y'+5z', 2x'+5y'+7z', 3x'+6y'+9z') \end{aligned}$$

On a donc f linéaire si $m=0$. On en déduit : $\boxed{f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)\Leftrightarrow m=0}$.

II Noyau, image, injectivité, surjectivité, isomorphisme

Correction 3.

Pour chacune des applications linéaires suivantes (on ne demande pas ici de vérifier qu'elles sont bien linéaires), décrire l'image et le noyau. En déduire si elles sont injectives, surjectives. Déterminer celles qui sont des isomorphismes, des automorphismes.

1. $\mathbf{f(x,y,z) = (x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z)}$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, donc f est bien un isomorphisme.
   - Recherche du noyau : on a :

     $$u \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ & & \\ y & = & z \end{array}\right.$$

     Ainsi : $\boxed{\ker f = \{z(1,1,1),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,1))}$. La famille $((1,1,1))$ est ainsi une famille génératrice de $\ker f$. Comme $(1,1,1)$ est un vecteur non nul, la famille $((1,1,1))$ est une famille libre et ainsi c'est une base de $\ker f$ et $\dim \ker f = 1$. On a donc $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$, on en déduit que ce n'est pas un automorphisme.
   - Recherche de l'image : on a deux méthodes possibles.
     - ⋆ Méthode 1 : on cherche les conditions sur (X,Y,Z) pour qu'il appartienne à $\mathrm{Im}\, f$. Pour cela, on cherche les conditions pour qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(X,Y,Z) = f(x,y,z)$, donc on résout :

       $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & X \\ x & + & y & - & 2z & = & Y \\ -2x & + & y & + & z & = & Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & X \\ & & & & & & \\ & & 3y & - & 3z & = & Y - X \\ & & & & & & \\ & & & & 0 & = & X+Y+Z = 0 \end{array}\right.$$

       On en déduit que $\mathrm{Im}\, f = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3, X+Y+Z = 0\}$. On met ensuite $\mathrm{Im}\, f$ sous forme vectorielle, et on obtient $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))}$. Les vecteurs $(-1,1,0),(-1,0,1)$ étant non colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, donc une base de $\mathrm{Im}\, f$ est donnée par $((-1,1,0),(-1,0,1))$, et $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.
     - ⋆ Méthode 2 : on connaît une forme paramétrique de $\mathrm{Im}\, f$, car $\mathrm{Im}\, f = \{(x-2y+z, x+y-2z, -2x+y+z), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$, donc on a $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(-2,1,1),(1,-2,1))$. Attention, les vecteurs que l'on trouve ne forment généralement pas une famille libre ! C'est le cas ici, car $(1,-2,1) = -(1,1,-2)-(-2,1,1)$. Les deux vecteurs restants $(1,1,-2),(-2,1,1)$ étant non colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, donc une base de $\mathrm{Im}\, f$. On conclut de la même façon.
2. $\mathbf{f(x,y) = (4x+y, x-y, 2x+3y)}$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, donc f n'est pas un isomorphisme. On trouve de plus $\boxed{\ker f = \{(0,0)\}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((4,1,2),(1,-1,3))}$. On a $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, donc $\boxed{f \text{ est injective}}$, et $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. On en déduit que f n'est pas un automorphisme.
3. $\mathbf{f(x,y,z) = (2x+y+z, x-y+2z, x+5y-4z)}$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, donc f est un isomorphisme. On trouve de plus $\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}((-1,1,1))}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((2,1,1),(1,-1,5))}$. On a $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$, et $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. On en déduit que f n'est pas un automorphisme.
4. $\mathbf{f(x,y,z) = (y, 0, x+z, 3x+y-2z)}$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, donc f n'est pas un isomorphisme. On trouve de plus $\boxed{\ker f = \{(0,0,0)\}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((0,0,1,3),(1,0,0,1),(0,0,1,-2))}$. On a $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\boxed{f \text{ est injective}}$, et $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^4$, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. On en déduit que f n'est pas un automorphisme.

5. $\mathbf{f(x,y,z) = (z, x-y, y+z)}$. On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, donc f est un isomorphisme. On trouve de plus $\boxed{\ker f = \{(0,0,0)\}}$ et $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3}$. On a $\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\boxed{f \text{ est injective}}$, et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$. On en déduit que f est un automorphisme.

Correction 4.

Soit E un espace vectoriel.

1. **Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $f^3 - 3f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Prouver que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f.**
   On a : $f^3 - 3f - 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow f^3 - 3f = 2Id_E \Leftrightarrow \frac{1}{2}(f^2 - 3Id_E) \circ f = Id_E$. On a donc trouvé une application g vérifiant $g \circ f = Id_E$: f est un automorphisme de E, et on a : $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 - 3Id_E)}$.
2. **Soit g un endomorphisme de E tel que : $g^3 - g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et tel que $g \neq Id_E$. Montrer que g n'est pas bijectif.**
   On a : $g^3 - g^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow g^2 \circ (g - Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que g est bijective. On a alors $g^{-1} \circ g^{-1} \circ g^2 \circ (g - Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, soit $g = Id_E$. Ceci n'est pas possible d'après l'énoncé. On a donc montré que $\boxed{g \text{ n'est pas bijectif}}$.

Correction 5.

Soit l'application f définie par : $f(x,y,z) = (3y - 2z, -x, 4y + 3z)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa réciproque.
On commence par montrer que f est linéaire : soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (3(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z'), -(\lambda x + x'), 4(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z')) \\ &= \lambda(3y - 2z, -x, 4y + 3z) + (3y' - 2z', -x', 4y' + 3z') = \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

De plus, on a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Montrons que f est bijective. Soit $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$, montrons qu'il existe un unique antécédent de (X,Y,Z) par f, c'est-à-dire un unique $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (X,Y,Z)$. On résout le système associé :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 3y & - & 2z & = & X \\ -x & & & & & = & Y \\ & & 4y & + & 3z & = & Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -Y \\ y & = & \frac{1}{17}(3X + 2Z) \\ z & = & \frac{1}{17}(3Z - 4X) \end{array}\right.$$

Ce système admet une unique solution, donc f est bijective : c'est donc un automorphisme de E, et on a $\boxed{f^{-1}(x,y,z) = \left(-y, \frac{1}{17}(3x + 2z), \frac{1}{17}(3z - 4x)\right)}$.

III Applications linéaires et matrices

Correction 6.

Soient les vecteurs $u = (1,1)$, $v = (2,-1)$ et $w = (1,4)$.

1. **Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.**
   Comme on sait que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ et que la famille de vecteurs (u,v) a deux vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}^2$. Comme les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, la famille (u,v) est libre et ainsi $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}^2}$.

2. **Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base (u, v).**
On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $w = au + bv$. On doit donc résoudre le système linéaire suivant :
$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a - b = 4 \end{cases}$. La résolution donne : $w = 3u - v$, donc $\boxed{M_{(u,v)}(w) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

3. **Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$ et $f(v) = (1, -1)$. Déterminer $f(x, y)$.**
On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base. Donc comme (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe bien une unique application linéaire f vérifiant $f(u) = (2, 1)$ et $f(v) = (1, -1)$.
On sait de plus qu'il existe a, b, c, d tels que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. On a donc : $f(u) = (2, 1) \Leftrightarrow (a + b, c + d) = (2, 1)$ et $(2a - b, 2c - d) = (1, -1)$. On résout le sytème associé, et on obtient $a = b = d = 1$ et $c = 0$, soit $\boxed{f(x, y) = (x + y, y)}$.

4. **Pour quelles valeurs du paramètre réel a existe-t-il une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $f(u) = (2, 1) \qquad f(v) = (1, -1) \qquad f(w) = (5, a)$?**
Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait qu'il existe une unique application linéaire g entièrement déterminée par la donnée de $g(u)$ et de $g(v)$ car (u, v) base de $\mathbb{R}^2$. De plus, on sait que l'on a : $w = 3u - v$. Comme g est linéaire, on a : $g(w) = g(3u - v) = 3g(u) - g(v) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4)$. Ainsi, pour que g soit linéaire, on doit avoir : $\boxed{a = 4}$.

Correction 7.

On considère f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices relativement à la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.**
La matrice de $f \circ f$ est la matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, celle de $g \circ g$ est $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, celle de $g \circ f$ est $NM = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celle de $f \circ g$ est $MN = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner une base de $\operatorname{Im} f$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im} g$.**
Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$: soit $v \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = f(u)$. Donc on a $f(v) = f(f(u)) = f^2(u)$. Or on a montré à la question précédente que $f^2(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc $f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $v \in \ker f$. Donc on a bien $\operatorname{Im} f \subset \ker f$. Il suffit alors de montrer que ces deux espaces vectoriels ont la même dimension. On calcule le rang de f :
$$\mathrm{rg} f = \mathrm{rg} M = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$
De plus, d'après le théorème du rang, on a $\dim \mathbb{R}^2 = \mathrm{rg} f + \dim \ker f$, soit $\dim \ker f = 2 - \mathrm{rg} f = 1$. On a donc bien $\dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f = 1$, et donc finalement $\boxed{\ker f = \operatorname{Im} f}$.
On sait que $\dim \operatorname{Im} f = 1$, et que $\operatorname{Im} f$ est engendré par les colonnes de M, soit $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}((2, 1), (-4, -2))$. Il suffit donc de choisir un vecteur non nul parmi les deux colonnes pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$. On a ainsi $\boxed{((2, 1)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$.
On sait que $\operatorname{Im} g$ est engendré par les colonnes de N, soit $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}((0, 0), (1, 0)) = \mathrm{Vect}((1, 0))$. Donc $((1, 0))$ est une famille génératrice et libre de $\operatorname{Im} g$, donc $\boxed{((0, 1)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} g}$.

3. **On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?**
On a $h \circ h = (f + g) \circ (f + g) = f^2 + f \circ g + g \circ f + g \circ g$, donc la matrice de h^2 est $M^2 + MN + NM + N^2$. D'après la question 1), la matrice de h^2 est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. L'application h^2 est donc l'application identité : $Id_{\mathbb{R}^2}$.

Correction 8.

Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de $\mathbf{f}(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \quad \mathbf{f}(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} -$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit surjective ? Injective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

L'image des vecteurs d'une base définit de façon unique une application linéaire. On a de plus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

La matrice associée à f dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par $M_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Calculons son rang :

$$\text{rg}M_\lambda = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 - L_1$$

On a alors deux possibilités : si $\lambda = 0$, on a $\text{rg}M_\lambda = 2$, et si $\lambda \neq 0$, on a $\text{rg}M_\lambda = 3$. Or on sait que f est surjective si et seulement si $\text{rg}M_\lambda = 3$. Il faut donc choisir $\lambda \neq 0$. De plus, comme f est un endomorphisme, on a équivalence entre bijectivité, surjectivité et injectivité. On a donc $\boxed{f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow \lambda \neq 0}$.

Correction 9.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. **Donner l'expression de $f(x, y, z)$.**
   On a $f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$. Or f est linéaire, donc on en déduit :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(2e_2 + 3e_3) + y(2e_1 - 5e_2 - 8e_3) + z(-e_1 + 4e_2 + 6e_3) \\ &= (2y - z)e_1 + (2x - 5y + 4z)e_2 + (3x - 8y + 6z)e_3 \end{aligned}$$

   On a donc finalement $\boxed{f(x, y, z) = (2y - z, 2x - 5y + 4z, 3x - 8y + 6z)}$.
   Une autre possibilité pour montrer ce résultat serait de passer par la matrice associée à f.

2. **Déterminer $\ker(f - Id_E)$ et en donner une base et la dimension.**
   On cherche les vecteurs u tels que $(f - Id_E)(u) = 0_E$, c'est-à-dire, on veut résoudre $f(x, y, z) = (x, y, z)$. En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y - z &=& x \\ 2x - 5y + 4z &=& y \\ 3x - 8y + 6z &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &-& z &=& 0 \\ 2x &-& 6y &+& 4z &=& 0 \\ 3x &-& 8y &+& 5z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right.$$

   On a donc $\boxed{\ker(f - Id_E) = \text{Vect}((1, 1, 1))}$. La famille $((1, 1, 1))$ est génératrice et libre (car un seul vecteur non nul), c'est donc une base de $\ker(f - Id_E)$. On en déduit : $\boxed{\dim\ker(f - Id_E) = 1}$.

3. **Déterminer $\ker(f^2 + Id_E)$ et en donner une base et la dimension.**
   On cherche les vecteurs u tels que $(f^2 + Id_E)(u) = 0_E$, c'est-à-dire, on veut résoudre $f^2(x, y, z) + (x, y, z) = 0_E$. On commence par calculer f^2 :

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= (2(2x - 5y + 4z) - (3x - 8y + 6z), 2(2y - z) - 5(2x - 5y + 4z) + 4(3x - 8y + 6z), \\ &\qquad 3(2y - z) - 8(2x - 5y + 4z) + 6(3x - 8y + 6z)) \\ &= (x - 2y + 2z, 2x - 3y + 2z, 2x - 2y + z) \end{aligned}$$

   On peut également passer par la matrice associée à f (ce qui est souvent plus rapide). On doit donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + 2z + x &=& 0 \\ 2x - 3y + 2z + y &=& 0 \\ 2x - 2y + z + z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x &-& 2y &+& 2z &=& 0 \\ 2x &-& 2y &+& 2z &=& 0 \\ 2x &-& 2y &+& 2z &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y - z \end{array}\right.$$

On a donc $\boxed{\ker(f^2+Id_E)=\text{Vect}((1,1,0),(-1,0,1))}$. La famille $((1,1,0),(-1,0,1))$ est génératrice et libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), c'est donc une base de $\ker(f^2+Id_E)$. On en déduit : $\boxed{\dim\ker(f^2+Id_E)=2}$.

4. **Montrer que** $\ker(f-Id_E)\cap\ker(f^2+Id_E)=\{0_E\}$**.**
Soit $(x,y,z)\in\ker(f-Id_E)\cap\ker(f^2+Id_E)$. On a alors :
$$\begin{cases} x &= z\\ y &= z\\ x &= y-z\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$
On a donc $\boxed{\ker(f-Id_E)\cap\ker(f^2+Id_E)=\{0_E\}}$.

5. **Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.**
Montrons que $((1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est une base de E. Comme $\dim E=3$, il suffit de montrer que cette famille est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(-1,0,1)=0_E.$$
On a alors $\lambda_1(1,1,1)\in\ker(f-Id_E)$ par définition, et de plus, comme on a : $\lambda_1(1,1,1)=-\lambda_2(1,1,0)-\lambda_3(-1,0,1)$, on a également $\lambda_1(1,1,1)\in\ker(f^2+Id_E)$. D'après la question précédente, on a donc $\lambda_1(1,1,1)=0_E$, soit $\lambda_1=0$. On en déduit que $\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(-1,0,1)=0_E$, ce qui implique $\lambda_2=\lambda_3=0$ car $((1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille libre. Donc finalement $((1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille libre de 3 éléments dans un espace de dimension 3, c'est donc $\boxed{\text{une base de } E}$.
On a $(1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ dans $\ker(f^2+Id_E)$, donc $f^2(1,1,0)=-(1,1,0)$, et $f^2(-1,0,1)=-(-1,0,1)$. De plus, $(1,1,1)\in\ker(f-Id_E)$, donc $f^2(1,1,1)=f(1,1,1)=(1,1,1)$. On en déduit que la matrice de f^2 dans la base $((1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est donnée par $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.
On dit que f^2 est diagonalisable : on peut trouver une base dans laquelle sa matrice aasociée est diagonale.

Correction 10.

On considère l'application linéaire définie par
$$\forall(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})\in\mathbb{R}^3,\quad \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{2y}-\mathbf{3z},-\mathbf{2x}+\mathbf{4y}-\mathbf{5z},\mathbf{z}).$$

1. **On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice M de f relative à $\mathcal{B}$.**
On a $f(e_1)=f(1,0,0)=(0,-2,0)$, $f(e_2)=f(0,1,0)=(2,4,0)$ et $f(e_3)=f(0,0,1)=(-3,-5,1)$. On en déduit : $\boxed{M=M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-2&4&-5\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

2. **On pose : $f_1=(-1,1,1)$, $f_2=(1,1,0)$ et $f_3=(1,0,0)$. Montrer que la famille $\mathcal{C}=(f_1,f_2,f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$.**
Comme on sait que $\dim\mathbb{R}^3=3$ et que la famille de vecteurs $\mathcal{C}$ a trois vecteurs, il suffit de montrer qu'elle est libre pour que cela soit une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons donc qu'elle est libre. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que : $af_1+bf_2+cf_3=0_{\mathbb{R}^3}$. La résolution de ce système linéaire donne bien $a=b=c=0$. Ainsi, la famille $\mathcal{C}$ est bien libre et $\boxed{\text{c'est donc bien une base de } \mathbb{R}^3}$.
Pour trouver la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$, on commence par calculer $f(f_1)=f(-1,1,1)=(-1,1,1)$, $f(f_2)=f(1,1,0)=(2,2,0)$ et $f(f_3)=f(1,0,0)=(0,-2,0)$. Il faut ensuite calculer les coordonnées de ces vecteurs, non plus dans la base canonique mais dans

la base $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$. On trouve $f(f_1) = f_1$ et $f(f_2) = 2f_2$, donc $M_\mathcal{C}(f(f_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_\mathcal{C}(f(f_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour le troisième c'est moins facile : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(f_3) = af_1 + bf_2 + cf_3$ c'est-à-dire : $(0, -2, 0) = af_1 + bf_2 + cf_3$. La résolution donne : $M_\mathcal{C}(f(f_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on obtient : $\boxed{N = M_\mathcal{C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

On remarque que la matrice obtenue est triangulaire supérieure, ce qui simplifie beaucoup de calculs.

3. **On appelle matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ dans une base $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})$. Déterminer $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$.**
On cherche la matrice de l'application identité $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Autrement dit, il suffit de trouver les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.
On obtient $\boxed{P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. **Vérifier que : $PNP^{-1} = M$. Retrouver ce résultat sans calcul (remarquer que $P^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$).**
On calcule tout d'abord P^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. On obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puis, en effectuant les deux produits de matrices, on obtient bien :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

soit $\boxed{P^{-1}MP = N}$.
On retrouve ce résultat facilement en considérant un vecteur u quelconque de matrice de coordonnées X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{C}$. Notons $Y = MX$ la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ et $Y' = NY$ la matrice des coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{C}$. Par définition de la matrice de passage, on a $X = PX'$ et $Y = PY'$. On en déduit :

$$P^{-1}MPX' = P^{-1}MX = P^{-1}Y = Y' = NX'.$$

Donc pour tout vecteur X', on a $P^{-1}MPX' = NX'$, donc on a bien $P^{-1}MP = N$.

Correction 11.

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ définie par**

$$\forall (\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) \in \mathbb{R}^\mathbf{n},\ \mathbf{f}(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) = (\mathbf{x_1} + \dots + \mathbf{x_n}, \mathbf{x_2} + \dots + \mathbf{x_n}, \dots, \mathbf{x_n}).$$

Montrer que f est bijective et donner l'expression analytique de sa réciproque.
Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On cherche à montrer qu'il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$. On résout donc :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots x_n &= y_1 \\ x_2 + \dots x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ x_{n-1} + x_n &= y_{n-1} \\ x_n &= y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= y_1 - y_2 & \mathbf{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2} \\ x_2 &= y_2 - y_3 & \mathbf{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3} \\ \vdots & & \\ x_{n-1} &= y_{n-1} - y_n & \mathbf{L_{n-1} \leftrightarrow L_{n-1} - L_n} \\ x_n &= y_n & \end{cases}$$

On en déduit que f est bijective, et que $f^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1 - y_2, y_2 - y_3, \dots, y_{n-1} - y_n, y_n)$.

2. **En déduire que la matrice** $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **est inversible et donner son inverse.**
La matrice M est la matrice de f dans la base canonique. Comme f est bijective, M **est inversible**. De plus, M^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique. La question précédente donne donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction 12.

Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ **défini par :** $h(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$.

1. **Donner la matrice associée à** f **relativement à la base canonique de** $\mathbb{R}^3$.
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On calcule $f(1, 0, 0), f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$, et on met le résultat en colonnes. On obtient $\boxed{M_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$.
2. **Déterminer une base de** $\ker h$. **Quel est le rang de** h **? Donner une base de** $\operatorname{Im} h$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$(x, y, z) \in \ker h \iff M_{\mathcal{B}}(h) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$
donc $\ker h = \{(z, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$, soit $\boxed{\ker h = \operatorname{Vect}((1, 0, 1))}$.
Ainsi d'après le théorème du rang $\operatorname{rg}(h) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(h))$, soit $\boxed{\operatorname{rg}(h) = 2}$.
Or $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}((-2, -1, -2), (1, 1, 1), (2, 1, 2)) = \operatorname{Vect}((1, 1, 1), (2, 1, 2))$, donc $((1, 1, 1), (2, 1, 2))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(h)$ a deux éléments, donc c'est une base de $\operatorname{Im}(h)$.
3. **Déterminer la matrice de** $h^2 = h \circ h$. **Quel est le rang de** h^2 **? Son noyau ? Son image ?**
On a : $M_{\mathcal{B}}(h^2) = (M_{\mathcal{B}}(h))^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc $\operatorname{Im}(h^2) = \operatorname{Vect}((-1, -1, -1), (1, 1, 1), (1, 1, 1))$, soit $\boxed{\operatorname{Im} f = Vect((1, 1, 1))}$, donc $\boxed{\operatorname{rg}(h^2) = 1}$ et après calculs $\boxed{\ker(h^2) = Vect((1, 1, 0), (1, 0, 1))}$.
4. **Calculer** h^n **pour** $n \in \mathbb{N}$.
On a : $M_{\mathcal{B}}(h^3) = M_{\mathcal{B}}(h) M_{\mathcal{B}}(h^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc $h^3 = h^2$. On montre alors par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ h^n = h^2}$.

Correction 13.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice relativement à la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base. Que remarquez-vous ?

On montre que (u_1,u_2,u_3) est une famille libre de 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

On calcule alors $f(u_1)$ en calculant $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient $f(u_1) = (-1,1,-1) = -u_1$. De même, on a $f(u_2) = (1,0,0) = u_2$ et $f(u_3) = (0,-1,2) = u_3$. On en déduit que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale : on dit que f est diagonalisable.

Correction 14.

Soit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à M.

1. **Soit $u = (1,2,-1)$. Montrer que (u) est une base de $\ker f$.**
   On calcule $M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et on obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$, i.e. $u \in \ker(f)$. Calculons à présent le rang de la matrice M à l'aide du pivot de Gauss :
   $$rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$
   Ainsi d'après le théorème du rang $rg(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\dim(\ker(f)) = 3 - rg(M) = 1$. La famille (u) est donc une famille libre à un seul élément dans $\ker(f)$ qui est de dimension 1, donc $\boxed{(u) \text{ est une base de } \ker(f).}$
2. **Soient $v = (1,0,-1)$ et $w = (1,-1,0)$. Calculer $f(v)$ et $f(w)$.**
   On a : $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{f(v) = v \text{ et } f(w) = w}$.
3. **Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f relativement à cette base.**
   On a une famille de 3 éléments dans un espace de dimension 3 : il suffit de montrer qu'elle est libre (à faire). On a donc $\boxed{(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
4. **Montrer que $\operatorname{Im} f = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.**
   D'après la question 2), on a $v = f(v)$, et $w = f(w)$ donc v et w sont dans $\operatorname{Im} f$. De plus, ces 2 vecteurs forment une famille libre (car ils sont non colinéaires) dans un espace de dimension 2 puisque $\mathrm{rg} f = 2$: donc (u,v) est une base de $\operatorname{Im} f$.
   De plus, on a $f(v) - v = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f(w) - w = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc v et w sont dans $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$. On a donc $\operatorname{Im} f \in \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$.
   Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que ces deux espaces sont de même dimension. On calcule de rang de $f - Id_{\mathbb{R}^3}$, soit celui de $M - I_3$:
   $$rg(M - I_3) = rg(2M - 2I_3) = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$
   Le théorème du rang donne alors $\dim\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \mathrm{rg}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = 2$. Donc on a bien $\boxed{\operatorname{Im} f = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})}$.

Correction 15.

Soit $E=\mathbb{R}^3$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice associée à la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5\\ -2 & -1 & -1\\ -4 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$

1. **Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.**
   Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z)\in\ker f \iff A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{l} 4x-y+5z=0\\ -2x-y-z=0\\ -4x+y-5z=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l} y=-z\\ 2x=-3z\end{array}\right.$$

   donc $\ker f=\{\left(-\frac{3}{2}z,-z,z\right):z\in\mathbb{R}\}$, soit $\boxed{\ker f=\operatorname{Vect}((3,2,-2))}$. Ainsi $\dim(\ker f)=1$ et par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} f)=3-=2$. Or $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}((4,-2,-4),(-1,-1,1),(5,-1,-5))$ et $((4,-2,-4),(-1,-1,1))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ car constituée de deux vecteurs non colinéaires ; elle a deux éléments et $\dim(\operatorname{Im} f)=2$ donc $\boxed{((4,-2,-4),(-1,-1,1)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$.

2. **Déterminer une base de $\ker f^2$ et une base de $\operatorname{Im} f^2$.**
   On a : $M(f^2)=A^2=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Im}(f^2)=\operatorname{Vect}((-2,-2,2),(2,2,-2),(-4,-4,4))$, soit $\boxed{\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}((1,1,-1))}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f^2))=\dim(\mathbb{R}^3)-\operatorname{rg}(f)=3-1=2$. Après calculs, nous trouvons que $\boxed{\ker(f^2)=\operatorname{Vect}((1,1,0),(0,2,1)).}$

3. **Déterminer A^3. Que peut-on en déduire pour $\ker f^3$ et $\operatorname{Im} f^3$?**
   On a : $A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8\\ 4 & -4 & 8\\ -4 & 4 & -8\end{pmatrix}=-2A^2$. Ainsi $\boxed{\ker(f^2)=\ker(f^3)}$ et $\boxed{\operatorname{Im}(f^2)=\operatorname{Im}(f^3)}$.

IV Applications linéaires et rang

Correction 16.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que : $f(e_1)=e_1-2e_2+e_3$, $f(e_2)=-2e_1+3e_2+e_3$ et $f(e_3)=-2e_2+6e_3$.

1. **Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$.**

   On a déjà les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$, on obtient donc $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}}$.

2. **Déterminer le rang de f, une base et la dimension de son noyau, une base de l'image.**
   Calculons le rang de la matrice précédente à l'aide du pivot de Gauss :

$$rg(f)=rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 6\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+3L_2}{=}rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2.$$

   Ainsi d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f))=\dim(\mathbb{R}^3)-rg(f)=3-2=1$, or $u=4e_1+2e_2-e_3\in\ker(f)$, donc $\boxed{(u) \text{ est une base de } \ker(f)}$. Nous avons $\operatorname{Im}(f)=Vect(f(e_1),f(e_2),f(e_3)))$, or $f(e_1)=e_1-2e_2+e_3$ et $f(e_2)=-2e_1+3e_2+e_3$ constituent une famille libre de $\operatorname{Im}(f)$ qui est de dimension 2, donc $\boxed{(f(e_1),f(e_2)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$.

Correction 17.

Pour chacune des matrices suivantes, on note f l'application linéaire canoniquement associé. Donner le rang, une base et la dimension du noyau et de l'image de f. On précisera lorsque f est injective, surjective ou un automorphisme ou isomorphisme.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-3&1&4\\-3&4&-5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&2&-3\\10&0&12\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}-3&4&0\\-2&4&7\\1&0&-7\\-1&4&0\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}2&1&1&3\\-1&-2&1&0\\2&3&-1&1\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\-1&-2&1\\2&4&-1\end{pmatrix}.$$

Je ne donne ici que les réponses :

1. On a $\mathrm{rg}(f_A)=3$, $\ker(f_A)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathrm{Im}(f_A)=\mathbb{R}^3$ (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_A)$), donc f_A est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On a $\mathrm{rg}(f_B)=4$, $\ker(f_B)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, $\mathrm{Im}(f_B)=\mathbb{R}^4$ (la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_B)$), donc f_B est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.
3. On a $\mathrm{rg}(f_C)=3$, $\ker(f_C)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathrm{Im}(f_C)=\mathbb{R}^3$ (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_C)$), donc f_C est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
4. On a $\mathrm{rg}(f_D)=3$, $\ker(f_D)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathrm{Im}(f_D)=\mathbb{R}^3$ (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc une base de $\mathrm{Im}(f_D)$), donc f_D est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. On a $\mathrm{rg}(f_E)=3$, $\ker(f_E)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathrm{Im}(f_E)=\mathrm{Vect}((-3,-2,1,-1),(4,4,0,4),(0,7,-7,0))$, donc f_E est injective, mais n'est pas surjective.
6. On a $\mathrm{rg}(f_F)=3$ et $\mathrm{Im}(f_F)\subset\mathbb{R}^3$, donc par égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}(f_F)=\mathbb{R}^3}$. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f_F))=\dim(\mathbb{R}^3)-\mathrm{rg}(f_F)=3-3=0$, donc $\boxed{\ker(f_F)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}}$, et f_F est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
7. On a $\mathrm{rg}(f_G)=2$, et $\mathrm{Im}(f_G)=\mathrm{Vect}((2,-1,2),(1,-2,3),(1,1,-1),(3,0,1))$. Or $((1,-2,3),(1,1,-1))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f_G)$ car elle est composée de deux vecteurs non-colinéaires : comme elle a deux éléments et que $\dim(\mathrm{Im}(f_G))=2$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f_G)$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(f_G)=\mathrm{Vect}((1,-2,3),(1,1,-1))}$ Par le théorème du rang, $\dim(\ker(f_G))=\dim(\mathbb{R}^4)-\mathrm{rg}(f_G)=4-2=2$. Après calculs, on trouve $\boxed{\ker(f_G)=\mathrm{Vect}((1,-1,-1,0),(-2,1,0,1))}$. Donc f_G n'est ni injective, ni surjective.
8. On a $\mathrm{rg}(f_H)=3$, et donc $\boxed{\mathrm{Im}(f_H)=\mathrm{Vect}((1,2,-1,2),(2,3,-2,4),(1,1,1,-1))}$. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f_H))=\dim(\mathbb{R}^3)-\mathrm{rg}(f_H)=3-3=0$ donc $\boxed{\ker(f_H)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}}$. Donc f_H est injective, mais non surjective.

Correction 18.

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associée aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...)

$$A=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&1&0\\0&1&2&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&0&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}.$$

- Pour A : on a $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}^4)$. Or $\boxed{\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Vect}((0,1,1,0))}$, donc $\mathrm{rg}f=1$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim\ker f=\dim(\mathbb{R})-\mathrm{rg}f=0$, donc $\boxed{\ker f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}}$.
- Pour B : on a $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$. Or $\mathrm{rg}A=1$, et $\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Vect}((1),(2),(3),(4))$, donc $\boxed{\mathrm{Im}\,f=\mathrm{Vect}((1))}$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim\ker f=\dim(\mathbb{R}^4)-\mathrm{rg}f=3$. On résout alors $x+2y+3z+4t=0$, et on trouve : $\boxed{\ker f=\mathrm{Vect}((-2,1,0,0),(-3,0,1,0),(-4,0,0,1))}$.

- Pour C : on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. Or $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$, et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,1),(2,1,2),(0,0,$
  Comme $((0,1,0),(1,0,1))$ est une famille libre de 2 éléments dans $\mathrm{Im}\, f$ de dimension 2, on a donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,1))}$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg} f = 2$, et après calculs, on trouve $\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}((-1,-2,1,0),(0,0,0,1))}$.
- Pour D : on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Par la méthode du pivot de Gauss, on trouve $\mathrm{rg} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3}$ et d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg} f = 0$, donc $\boxed{\ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$.
- Pour E : on a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Par la méthode du pivot de Gauss, on trouve $\mathrm{rg} f = 2$, donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,3,5),(2,4,6))}$ et d'après le théorème du rang, $\dim \ker f = \dim(\mathbb{R}^2) - \mathrm{rg} f = 0$, donc $\boxed{\ker f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$.

Correction 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **et f canoniquement associé à A.**

1. **Calculer le rang de f. En déduire le noyau et l'image de f.**
   Déterminons le rang de f à l'aide du pivot du Gauss sur A :
   $$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$
   Donc $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$, donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$ et par le théorème du rang $\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 3 - 3 = 0$, donc $\boxed{\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$.
2. **f est-elle bijective ? Si oui, déterminer f^{-1}.**
   Comme $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f est injective, et comme f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $\boxed{f \text{ est bijective}}$. De plus, la matrice de f^{-1} est donnée par A^{-1}. Après calcul, on obtient : $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{f^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{2}(-x+y+z, x-y+z, x+y-z)}$.
3. **Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$.**

   - Déterminons les valeurs de λ tel que le rang de $f - \lambda Id$ soit différent de 3 (car alors par le théorème du rang $\dim(\ker(f - \lambda Id)) \geq 1$) :
     $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f - \lambda Id) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \quad &= \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_3}}{=} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2}{=} \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
     Ainsi $\mathrm{rg}(f - \lambda Id) \neq 3$ si et seulement si $-1-\lambda = 0$ ou $2 + \lambda - \lambda^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2}$.
   - Calcul de $\ker(f + Id)$: on a $u(x,y,z) \in \ker(f + Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$
     $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z$.
     Ainsi, on a : $\boxed{\ker(f + Id) = \{(-y-z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))}$.

- Calcul de $\ker(f-2Id)$: on a $u(x,y,z) \in \ker(f-2Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & 2z & = & 0 & \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 & \mathbf{L_2 - L_1} \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 & \mathbf{L_3 + 2L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & - & 2z & = & 0 & \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \mathbf{L_3 + L_2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array}\right.$$

Ainsi, on a : $\boxed{\ker(f+Id) = \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,1))}$.

4. **Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(f + Id_{\mathbb{R}^3})^n$.**
   On a : $M(f+Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $(f+Id)^2 = 3(f+Id)$ et on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\boxed{(f+Id)^n = 3^{n-1}(f+Id)}$.

V Exercices plus abstraits

Correction 20.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

1. **Montrer que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}\, g$ et $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.**
   Soit $v \in \text{Im}(g \circ f)$: il existe $u \in E$ tel que $v = g \circ f(u)$, donc $v = g(f(u))$ avec $f(u) \in E$ car $f \in \mathcal{L}(E)$. On a donc $v \in \text{Im}\, f$, et donc $\boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}\, g}$.
   Soit $u \in \ker f$: on a alors $f(u) = 0_E$. Donc $g \circ f(u) = g(0_E) = 0_E$ car $f \in \mathcal{L}(E)$. On a donc $u \in \ker(g \circ f)$, soit $\boxed{\ker f \subset \ker(g \circ f)}$
2. **Montrer que : $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im}\, f \subset \ker g$.**
   On raisonne par double implication :
   - Montrons que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \text{Im}\, f \subset \ker g$.
     On suppose $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $v \in \text{Im}\, f$, montrons que $v \in \ker g$. On a $v \in \text{Im}\, f$, donc il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$, donc $g(v) = g \circ f(u) = 0_E$ car $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $v \in \ker g$, et donc $\text{Im}\, f \subset \ker g$.
   - Montrons que $\text{Im}\, f \subset \ker g \Rightarrow g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
     On suppose $\text{Im}\, f \subset \ker g$. On a alors, pour tout $u \in E$: $g \circ f(u) = 0_E$, car $f(u) \in \text{Im}\, f$, et $\text{Im}\, f \subset \ker g$, donc $f(u) \in \ker g$. Donc $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

   On a donc bien $\boxed{g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im}\, f \subset \ker g}$.

Correction 21.

Soient E et F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(x_1,\dots,x_r)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que :

1. **Si $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est libre, alors $(x_1,\dots x_r)$ est libre.**
   Raisonnons par contraposée : on suppose que $(x_1,\dots x_r)$ est liée. Alors il existe $(\lambda 1,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = 0_E$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on en déduit : $\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_r f(u_r) = 0_F$, donc la famille $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est liée.
   On a donc montré par contraposée que $\boxed{(f(x_1),\dots,f(x_r)) \text{ libre} \Rightarrow (x_1,\dots x_r) \text{ libre}}$.
2. **Si $(x_1,\dots,x_r)$ est libre et f injective, alors $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est libre.**
   Raisonnons par l'absurde : on suppose que $(x_1,\dots,x_r)$ est libre et f injective, et que $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est liée. Il existe alors $(\lambda 1,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_r f(u_r) = 0_F$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a alors $f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) = 0_F$. Or f est injective, donc nécessairement $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r = 0_E$. Mais ceci est impossible puisque $(x_1,\dots,x_r)$ est libre.
   On a donc montré par l'absurde que $\boxed{((x_1,\dots,x_r) \text{ libre et } f \text{ injective}) \Rightarrow (f(x_1),\dots,f(x_r)) \text{ libre}}$.
3. **Si $(x_1,\dots x_r)$ est une famille génératrice de E et f surjective, alors $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est une famille génératrice de F.**
   Supposons que $(x_1,\dots x_r)$ est une famille génératrice de E et f surjective. Comme f est surjective, pour tout $v \in F$, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Or $(x_1,\dots x_r)$ est une famille génératrice de E, donc il existe $(\lambda 1,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a alors : $v = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_r f(u_r)$, donc v s'exprime comme combinaison linéaire de $(f(x_1),\dots,f(x_r))$.
   On a donc $\boxed{(f(x_1),\dots,f(x_r)) \text{ est une famille génératrice de } F}$.
4. **Si $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est une famille génératrice de F et f injective alors $(x_1,\dots,x_r)$ est une famille génératrice de E.**
   Supposons $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est une famille génératrice de F et f injective. Soit $u \in E$, on a alors $f(u) \in F$. Or $(f(x_1),\dots,f(x_r))$ est une famille génératrice de F, donc il existe $(\lambda 1,\dots,\lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $f(u) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_r f(u_r)$. Or $f \in \mathcal{L}(E,F)$, donc $f(u) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r)$. De plus, f est injective, donc on a nécessairement $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$, donc u s'exprime comme combinaison linéaire de $(x_1,\dots,x_r)$. On a donc $\boxed{(x_1,\dots,x_r) \text{ est une famille génératrice de } E}$.
5. **f est bijective si et seulement si l'image de toute base de E par f est une base de F.**
   On raisonne par double implication :
   - On suppose que f est bijective. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Montrons que $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de F. Comme f est injective, d'après la question 2) on a $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ qui est une famille libre de F. De plus, comme f est surjective, d'après la question 3) on a $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ qui est une famille génératrice de F. Donc $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de F.
   - On suppose que l'image de toute base de E par f est une base de F. Montrons que f est bijective.
     - ⋆ On a alors nécessairement f surjective, puisque pour toute base $(e_1,\dots,e_n)$ de E, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de F. Donc pour tout $v \in F$, il existe $(\lambda 1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $v = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a alors $v = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$, donc $v \in \operatorname{Im} f$. Donc f est surjective.
     - ⋆ Montrons que f est injective. Raisonnons par l'absurde : on suppose que f n'est pas injective. Il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = 0_F$. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Il existe alors $(\lambda 1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a alors $f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$, ce qui est impossible puisque par hypothèse, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de F.

   On a donc montré que $\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si l'image de toute base de } E \text{ par } f \text{ est une base de } F}$

Correction 22.

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
Soit $u \in \ker(f)$, montrons que $g(u) \in \ker(f)$: $f(g(u)) = g(f(u)) = g(0_E) = 0_E$. Donc $g(\ker(f)) \subset$

$\ker(f)$, et $\boxed{\ker(f) \text{ est stable par } g}$.
Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$ alors il existe $v \in E$ tel que $f(v) = u$. Montrons que $g(u) \in \mathrm{Im}(f)$: $g(u) = g(f(v)) = f(g(v)) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $g(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$, et $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est stable par } g}$.

Correction 23.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, on a : $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f$ et $\ker(\lambda f) = \ker f$.
On a :

$$\begin{aligned}
v \in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists\, u \in E \text{ tel que } v = f(u)\\
&\Leftrightarrow \exists\, u' \in E \text{ tel que } v = f(\lambda u') \quad \text{en prenant } u' = \frac{u}{\lambda}\ (\lambda \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \exists\, u' \in E \text{ tel que } v = \lambda f(u') \quad \text{car } f \text{ est linéaire}\\
&\Leftrightarrow v \in \mathrm{Im}(\lambda f).
\end{aligned}$$

Donc on a $\boxed{\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}\, f}$.
De même, on a :

$$\begin{aligned}
v \in \ker(\lambda f) &\Leftrightarrow \lambda f(u) = 0_F\\
&\Leftrightarrow f(u) = 0_F \quad \text{car } \lambda \neq 0\\
&\Leftrightarrow v \in \ker(f).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\ker(\lambda f) = \ker f}$.

Correction 24.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $f \circ f = f^2$. Montrer que : $\ker(f^2) = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$.
On raisonne par double implication :

- On suppose que $\ker(f^2) = \ker f$. Soit $v \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$. Il existe alors $u \in E$ tel que $v = f(u)$. De plus, $f(v) = 0_E$, donc $f^2(u) = 0_E$, soit $u \in \ker(f^2)$. Or $\ker(f^2) = \ker f$, donc $u \in \ker f$. On a donc $f(u) = 0_E$, soit $v = 0_E$. Donc $ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$.
- On suppose $ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$. Montrons que $\ker(f^2) = \ker f$ par double inclusion.
  - ⋆ On a toujours $\ker f \subset \ker(f^2)$. En effet, soit $u \in \ker f$, on a alors $f(u) = 0_E$, donc $f^2(u) = f(0_E) = 0_E$, donc $u \in \ker(f^2)$.
  - ⋆ Montrons que $\ker(f^2) \subset \ker f$. Soit $u \in \ker(f^2)$. On a alors $f^2(u) = 0_E$, soit $f(f(u)) = 0_E$. Soit $v = f(u)$. On a alors $v \in \mathrm{Im}\, f$, et de plus $f(v) = 0_E$ donc $v \in \ker f$. On a donc $v = 0_E$ car $ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$, et donc $f(u) = 0_E$, soit $u \in \ker f$.

On a donc bien $\boxed{\ker(f^2) = \ker f \Leftrightarrow \ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}}$.

Correction 25.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ soit liée.

1. **Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = \lambda e_i$. (On pourra considérer $e_1 + e_i$).**
   On sait que pour tout i, la famille $(e_i, f(e_i))$ est liée, donc il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Attention que ce n'est pas exactement ce qu'il faut montrer ! Dans l'énoncé, le λ est défini en premier, et ne doit donc pas dépendre de i : il faut montrer que λ_i ne dépend pas de i.
   On a $f(e_1+e_i) = f(e_1)+f(e_i) = \lambda_1 e_1+\lambda_i e_i$. D'autre part, on sait que la famille $(e_1+e_i, f(e_1+e_i))$ est liée, donc il existe μ_i tel que $f(e_1+e_i) = \mu_i(e_1+e_i)$. On en déduit que $\lambda_1 e_1+\lambda_i e_i = \mu_i(e_1+e_i)$, soit que $(\lambda_1 - \mu_i)e_1 + (\lambda_i - \mu_i)e_i = 0_E$. Or la famille (e_1, e_i) est libre car $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc on a $\lambda_1 = \mu_i$ et $\lambda_i = \mu_i$ soit finalement $\lambda_1 = \lambda_i$: λ_i ne dépend pas de i.
   On a donc bien montré $\boxed{\text{qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = \lambda e_i}$.
2. **Montrer que f est soit identiquement nulle, soit une homothétie vectorielle.**
   On a donc montré que la matrice de f dans la base canonique est donnée par $M(f) = \lambda I_n$. On a donc, pour tout $u \in E$, $f(u) = \lambda u$, donc $\boxed{f \text{ est soit identiquement nulle (si } \lambda = 0\text{), soit une homothétie vector}}$

Correction 26.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

1. **Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $(u, f(u), f^2(u))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.**
   Soit $u \in E$ tel que $f^2(u) \neq 0_E$. Montrons que $(u, f(u), f^2(u))$ est une famille libre : soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0_E & \\
\Rightarrow\quad & f(\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u)) = f(0_E) & \\
\Rightarrow\quad & \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u) = 0_E & \text{car } f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } f^3(u) = 0_E \\
\Rightarrow\quad & f(\lambda_1 f(u) + \lambda_2 f^2(u)) = f(0_E) & \\
\Rightarrow\quad & \lambda_1 f^2(u) = 0_E & \text{car } f \in \mathcal{L}(E) \text{ et } f^3(u) = 0_E
\end{aligned}$$

   Or on a $f^2(u) \neq 0$, donc $\lambda_1 = 0$ on en déduit que $\lambda_2 f^2(u) = 0_E$, et pour la même raison $\lambda_2 = 0$, et finalement $\lambda_3 f^2(u) = 0_E$ et donc $\lambda_3 = 0$. Donc $\boxed{\text{il existe un vecteur } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (u, f(u), f^2(u)) \text{ soit une fa}}$

2. **Donner la matrice de f dans cette base.**
   On sait que $(u, f(u), f^2(u))$ est une famille libre de 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   On a de plus : $f(u) = 0 \times u + 1 \times f(u) + 0 \times f^2(u)$, $f(f(u)) = 0 \times u + 0 \times f(u) + 1 \times f^2(u)$, et $f(f^2(u)) = 0_E$, donc la matrice dans cette base est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.