TD Variables aléatoires - correction

I Calculs de lois, fonctions de répartition, espérances et variances

Correction 1.

- Univers image : les seuls numéros que l'on peut obtenir sont $1, 2$ et 3, donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
- Calcul de la loi de X. Le dé est non truqué, on a donc équiprobabilité pour chacune des faces du dés. On a 6 faces en tout, et une seule ayant le numéro 1, donc $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{6}}$. On a deux faces portant le numéro 2, donc $P(X = 2) = \frac{2}{6}$, soit $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{3}}$. Enfin, on a trois faces portant le numéro 3, donc $P(X = 3) = \frac{3}{6}$, soit $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{2}}$.
- Fonction de répartition : on utilise la formule du cours :
  - ⋆ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
  - ⋆ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$,
  - ⋆ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$,
  - ⋆ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
- Espérance : on calcule

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

soit $\boxed{E(X) = \frac{7}{3}}$.

- Variance : on utilise la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

On calcule $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{23}{3}$$

soit $V(x) = \frac{23}{3} - \frac{49}{9}$, et donc $\boxed{V(X) = \frac{20}{9}}$.

Correction 2.

On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.

1. Raisonnement direct :
On commence par calculer l'univers : les lancers sont successifs donc avec ordre, et avec répétition, donc Ω est l'ensemble des 6-listes de numéros entre 1 et 6. On a donc $\operatorname{Card}\Omega = 6^6$.
On regarde ensuite l'univers image : $X(\Omega) = [\![0, 6]\!]$. On calcule donc les $P(X = k)$ pour $k \in [\![0, 6]\!]$.
Le dé est non pipé, on a donc équiprobabilité pour tous les lancers : on se ramène à du dénombrement. Je détaille un des cas, les autres se démontrent avec le même raisonnement.
Calcul de $P(X = 1)$. On commence par choisir la place du 6 que l'on a tiré : on a 6 possibilités. Puis pour chaque configuration, on a une possibilité pour le 6, et 5 possibilités pour chacun des numéros qui ne sont pas des 6, soit 5^5 possibilités. On a donc une probabilité $P(X = 1) = \frac{6 \times 5^5}{6^6}$, soit $\boxed{P(X = 1) = \frac{5^5}{6^5}}$.
De même (à détailler), on trouve : $\boxed{P(X = 0) = \frac{5^6}{6^6}}$, $\boxed{P(X = 2) = \frac{\binom{6}{2}5^4}{6^6}}$, $\boxed{P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}5^3}{6^6}}$, $\boxed{P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4}5^2}{6^6}}$, $\boxed{P(X = 5) = \frac{5}{6^5}}$, $\boxed{P(X = 6) = \frac{1}{6^6}}$.

Tableau et diagramme à faire.
Raisonnement en reconnaissant une loi usuelle : on a une succession de 6 expériences aléatoires semblables et indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$ (probabilité de tomber sur 6 pour un dé équilibré). On reconnaît donc une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{6}$. On a donc $X(\Omega) = [\![0,6]\!]$ et $\forall k \in [\![0,6]\!]$, $\boxed{P(X=k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}}$.

2. On utilise la formule du cours qui donne
   - ⋆ si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
   - ⋆ $\forall k \in [\![0,5]\!]$, si $x \in [k, k+1[$, $F_X(x) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k}\binom{6}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}$,
   - ⋆ si $x \geq 6$, on a $F_X(x) = 1$.
3. On utilise les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale : $E(X) = 6 \times \frac{1}{6}$, soit $\boxed{E(X) = 1}$, et $V(X) = 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, soit $\boxed{V(X) = \frac{5}{6}}$.
4. Soit $h(x) = (x-3)^2$. On commence par calculer $Y(\Omega) = h([\![0,6]\!]) = \{0,1,4,9\}$. Puis on en déduit :
   - ⋆ $P(Y=0) = P(X=3)$, soit $\boxed{P(Y=0) = \frac{\binom{6}{3}5^3}{6^6}}$.
   - ⋆ $P(Y=1) = P([X=2] \cup [X=4]) = P(X=2) + P(X=4)$ car ce sont des événements incompatibles. Soit $\boxed{P(Y=1) = \frac{\binom{6}{2}5^4}{6^6} + \frac{\binom{6}{4}5^2}{6^6}}$.
   - ⋆ $P(Y=4) = P([X=1] \cup [X=5]) = P(X=1) + P(X=5)$, soit $\boxed{P(Y=4) = \frac{5^5}{6^5} + \frac{5}{6^5}}$.
   - ⋆ $P(Y=9) = P([X=0] \cup [X=6]) = P(X=0) + P(X=6)$, soit $\boxed{P(Y=9) = \frac{5^6}{6^6} + \frac{1}{6^6}}$.
5. On commence par calculer $Z(\Omega) = g([\![0,6]\!]) = \{-1,1\}$. Puis on en déduit :
   - ⋆ $P(Z=1) = P([X=0] \cup [X=2] \cup [X=4] \cup [X=6])$, soit $\boxed{P(Z=1) = \frac{1}{6^6}(5^6 + \binom{6}{2}5^4 + \binom{6}{4}5^2 + 1)}$.
   - ⋆ $P(Z=-1) = P([X=1] \cup [X=3] \cup [X=5])$, soit $\boxed{P(Z=-1) = \frac{1}{6^6}(5^5 + \binom{6}{3}5^3 + 30)}$.

   On en déduit l'espérance avec la formule $E(Z) = P(Z=1) - P(Z=-1)$.

Correction 3.

La loi de probabilité d'une var X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P([X=x_i])$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

1. Diagramme à faire.
2. D'après la formule du cours :
   - ⋆ si $x < -4$, on a $F_X(x) = 0$,
   - ⋆ si $-4 \leq x < -2$, on a $F_X(x) = P(X=-4) = 0,10$,
   - ⋆ si $-2 \leq x < 1$, on a $F_X(x) = P(X=-4) + P(X=-2) = 0,45$,
   - ⋆ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X=-4) + P(X=-2) + P(X=1) = 0,6$,
   - ⋆ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X=-4) + P(X=-2) + P(X=1) + P(X=2) = 0,85$,
   - ⋆ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
3. On a $[X=0] \cup [X<0] = [X \leq 0]$, et comme ce sont des événements incompatibles, on a $P(X \leq 0) = P(X=0) + P(X \leq 0)$. On en déduit : $P([X<0]) = P(X \leq 0) - P([X=0]) = F_X(0) - 0$, soit $\boxed{P([X<0]) = 0,45}$.
   De même, $P([X > -1]) = 1 - P(X \leq -1) = 1 - F_X(-1) = 1 - 0,45$, soit $\boxed{P([X > -1]) = 0,55}$.
   Enfin, $P([-3,5 < X \leq -2]) = P(X \leq -2) - P(X \leq -3,5) = F_X(-2) - F_X(-3,5)$, soit $\boxed{P([-3,5 < X \leq -2]) = 0,35}$.

4. Ici je donne juste les résultats :

x_i	1	2	3	4
$P([\lvert X\rvert = x_i])$	0,15	0,60	0,15	0,10

y_i	0	4	10
$P([Y = y_i])$	0,25	0,25	0,5

z_i	-4	-2	1
$P([Z = z_i])$	0,10	0,35	0,55

t_i	-4	-2	1	2	3
$P([T = t_i])$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

Correction 4.

La loi de probabilité d'une var X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P([X = x_i])$	θ	$\frac{1}{2} - \theta$	$\frac{1}{2} - \theta$	θ

1. D'après la formule du cours :
   - ⋆ si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
   - ⋆ si $0 \leq x < 1$, on a $F_X(x) = P(X = 0) = \theta$,
   - ⋆ si $1 \leq x < 2$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \theta + \frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{2}$,
   - ⋆ si $2 \leq x < 3$, on a $F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \theta + \frac{1}{2} - \theta + \frac{1}{2} - \theta = 1 - \theta$,
   - ⋆ si $x \geq 3$, on a $F_X(x) = 1$.
2. Espérance : on calcule

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} kP(X = k) = 0 \times \theta + 1 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 3\theta$$

soit $\boxed{E(X) = \frac{3}{2}}$ (ce qui était attendu, puisque X est symétrique).
Pour la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, en calculant $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X = k) = 0^2 \times \theta + 1^2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 2^2 \times (\frac{1}{2} - \theta) + 3^2\theta = 4\theta + \frac{5}{2}.$$

On obtient $\boxed{V(X) = 4\theta - \frac{1}{4}}$.

3. On remarque que $R(\Omega) = \{0\}$, donc R est constante égale à 0 : $\boxed{P(R = 0) = 1}$.
4. Ici je donne juste les résultats :

s_i	0	1
$P([S = s_i])$	$1 - \theta$	θ

t_i	0	1
$P([T = t_i])$	2θ	$1 - 2\theta$

v_i	0	1
$P([V = v_i])$	$1 - \theta$	θ

Correction 5.

On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces équilibrées. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.

1. On pense ici à passer par la fonction de répartition, car il y a des min et des max. On note N_1 le numéro du premier dé et N_2 celui du deuxième.
   - Fonction de répartition de X, puis loi de X. On a tout d'abord $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. Soit $k \in [\![1, 6]\!]$, on cherche à calculer $P(X \leq k)$. Si le plus grand numéro est inférieur à k, cela veut dire que les deux numéros sont inférieurs à k. On a donc $P(X \leq k) = P([N_1 \leq k] \cap [N_2 \leq k])$. Les deux lancers étant indépendants, on obtient :

$$P(X \leq k) = P(N_1 \leq k) \times P(N_2 \leq k).$$

Or les dés sont équilibrés, donc on a équiprobabilité. On en déduit $P(N_i \leq k) = \dfrac{k}{6}$, et donc $\boxed{P(X \leq k) = \dfrac{k^2}{36}}$. La fonction de répartition de X est donc donnée par

- $\star$ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
- $\star$ si $k \leq x < k+1$, avec $k \in [\![1,5]\!]$, on a $F_X(x) = \dfrac{k^2}{36}$,
- $\star$ si $x \geq 6$, on a $F_X(x) = 1$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

- $\star$ si $k = 1$, on a $P(X=1) = F_X(1)$, soit $\boxed{P(X=1) = \dfrac{1}{36}}$,
- $\star$ si $k \in [\![2,6]\!]$, on a $P(X=k) = F_X(k) - F_X(k-1)$, soit $\boxed{P(X=k) = \dfrac{k^2}{36} - \dfrac{(k-1)^2}{36}}$.

On remarque que l'on peut regrouper les deux cas dans la deuxième formule.

- Fonction de répartition de Y, puis loi de Y. On a de même $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$. Soit $k \in [\![1,6]\!]$, on cherche à calculer cette fois $P(Y > k)$ pour en déduire $P(Y \leq k)$. Si le plus petit numéro est strictement supérieur à k, cela veut dire que les deux numéros sont strictement supérieurs à k. On a donc $P(Y > k) = P([N_1 > k] \cap [N_2 > k])$. Le même raisonnement que précédemment donne $P(Y > k) = \dfrac{(6-k)^2}{36}$. On en déduit $\boxed{P(Y \leq k) = 1 - \dfrac{(6-k)^2}{36}}$, puis
  - $\star$ si $x < 1$, on a $F_Y(x) = 0$,
  - $\star$ si $k \leq x < k+1$, avec $k \in [\![1,5]\!]$, on a $F_Y(x) = 1 - \dfrac{(6-k)^2}{36}$,
  - $\star$ si $x \geq 6$, on a $F_Y(x) = 1$.

  On en déduit la loi de probabilité de Y :

  - $\star$ si $k = 1$, on a $P(Y=1) = F_Y(1) = 1 - \dfrac{25}{36}$, soit $\boxed{P(Y=1) = \dfrac{9}{36}}$,
  - $\star$ si $k \in [\![2,6]\!]$, on a $P(Y=k) = F_Y(k) - F_Y(k-1)$, soit $\boxed{P(X=k) = \dfrac{(6-(k-1))^2}{36} - \dfrac{(6-k)^2}{36}}$.

2. La formule de l'espérance donne

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k(k^2 - k^2 + 2k - 1) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k(2k-1) \\
&= \frac{2}{36}\sum_{k=0}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k \\
&= \frac{2}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} - \frac{1}{36} \times \frac{6(6+1)}{2}
\end{aligned}$$

en utilisant les formules usuelles de sommes.

On obtient donc : $\boxed{E(X) = \dfrac{161}{36}}$.

De même, on a

$$
\begin{aligned}
E(Y) = \sum_{k=1}^{6} kP(Y=k) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\frac{(6-(k-1))^2}{36} - \frac{(6-k)^2}{36}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k((6-k)^2 + 2(6-k) + 1 - (6-k)^2) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k(13-2k) \\
&= \frac{13}{36}\sum_{k=1}^{6} k - \frac{2}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2 \\
&= \frac{13}{36} \times \frac{6(6+1)}{2} - \frac{2}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6}
\end{aligned}
$$

soit $\boxed{E(Y) = \frac{91}{36}}$. On vérifie que l'on a bien $E(X) > E(Y)$, ce qui est normal, car la valeur moyenne du plus grand numéro doit être supérieure à la valeur moyenne du plus petit numéro.

3. D'après la formule de Koenig-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. De plus, d'après le théorème de transfert on a :

$$
\begin{aligned}
E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \left(\frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k2(2k-1) \\
&= \frac{2}{36}\sum_{k=0}^{6} k^3 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{6} k^2 \\
&= \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6}
\end{aligned}
$$

On obtient donc $E(X^2) = \frac{791}{36}$. On en déduit $\boxed{V(X) = \frac{2555}{36^2} \simeq 1.97}$.
La même méthode donne : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, avec :

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(Y=k) &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \left(\frac{(6-(k-1))^2}{36} - \frac{(6-k)^2}{36}\right) \\
&= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2(13-2k) \\
&= \frac{13}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{2}{36}\sum_{k=1}^{6} k^3 \\
&= \frac{13}{36} \times \frac{6(6+1)(12+1)}{6} - \frac{2}{36} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

On obtient donc $E(Y^2) = \frac{301}{36}$. On en déduit $\boxed{V(Y) = \frac{2555}{36^2} \simeq 1.97}$. Remarquons qu'il est logique que le minimum et le maximum des numéros aient la même variance, c'est-à-dire la même dispersion par rapport à leur valeur moyenne.

Correction 6.

1. • Loi de X. On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$, et on sait que pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, on a $P(X = k) = \alpha$ avec α à déterminer. Or on a $\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$, donc

$$\sum_{k=1}^{6} \alpha k = 1 \Rightarrow \alpha \frac{6 \times 7}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{21}.$$

On obtient donc $\boxed{P(X = k) = \frac{k}{21}}$.

• Fonction de répartition. On utilise la formule du cours :

⋆ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,

⋆ si $k \leq x < k + 1$, avec $k \in [\![1, 5]\!]$, on a $F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{21}$, soit $F_X(x) = \frac{k(k+1)}{42}$.

⋆ si $x \geq 6$, on a $F_Y(x) = 1$.

• Espérance. On a $E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6 \times 21}$, soit $\boxed{E(X) = \frac{91}{21}}$.

• Variance. On applique la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, en calculant $E(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^3}{21} = \frac{1}{21} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2 = \frac{441}{21}$$

soit $\boxed{V(X) = \frac{441}{21} - \left(\frac{91}{21}\right)^2 \simeq 2.2}$.

2. On a $Y(\Omega) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$. De plus, pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, on a $\boxed{P(Y = \frac{1}{k}) = P(X = k) = \frac{k}{21}}$.
On utilise le théorème du transfert pour calculer l'espérance :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21}$$

soit $\boxed{E(Y) = \frac{6}{21}}$.

3. On donne ici uniquement les résultats :

z_i	-2	0	4
$P([Z = z_i])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

t_i	0	1	2	3
$P([T = t_i])$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{6}{21}$

On en déduit $\boxed{E(Z) = \frac{2}{3}}$ et $\boxed{E(T) = \frac{41}{21}}$.

Correction 7.

1. On commence par trouver l'univers image : on peut toucher de 0 à n cibles, donc $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Notons F_k l'événement « le tireur touche la k-ième cible ». D'après l'énoncé, $P(F_k) = p_k$. De plus, on a, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$P(X = k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap \overline{F}_{k+1}),$$

car pour toucher exactement k cibles, il faut réussir les k premiers coups, et rater la cible au $k+1$-ième essai. On a, d'après la formule des probabilités composées, comme $P(F_1\cap\ldots\cap F_k)\neq 0)$:

$$P(X=k)=P(F_1)\times P_{F_1}(F_2)\times\ldots\times\times P_{F_1\cap\ldots\cap F_k}(\overline{F}_{k+1})$$

d'où $\boxed{P(X=k)=p_1p_2\ldots p_k(1-p_{k+1})}$.

Pour $k=0$, il faut rater la première cible, donc $\boxed{P(X=0)=1-p_1}$.

Pour $k=n$, il faut toucher toutes les cibles. le même raisonnement donne $\boxed{P(X=n)=p_1p_2\ldots p_n}$.

2. (a) D'après la question précédente, on a, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\boxed{P(X=k)=p^kq}$, et $\boxed{P(X=n)=p^n}$.

   (b) D'après le théorème de transfert, on a

$$G_X(t)=E(t^X)=\sum_{k=0}^{n}t^kP(X=k).$$

Cette expression est un polynôme en t, donc est bien dérivable par rapport à t, et on a

$$G'_X(t)=0+\sum_{k=1}^{n}kt^{k-1}P(X=k).$$

On en déduit

$$G'_X(1)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k),$$

On a donc bien : $\boxed{G'_X(1)=E(X)}$.

Calculons $G_X(t)$. On a

$$G_X(t)=\sum_{k=0}^{n}t^kP(X=k)=q+\sum_{k=1}^{n-1}t^kp^kq+t^np^n=q\sum_{k=0}^{n-1}(tp)^k+t^np^n.$$

Or $tp\neq 1$, donc on a

$$G_X(t)=q\frac{1-(tp)^n}{1-tp}+t^np^n.$$

On dérive :

$$G'_X(t)=q\frac{-np(tp)^{n-1}(1-tp)-(1-(tp)^n)(-p)}{(1-tp)^2}+nt^{n-1}p^n.$$

On prend la valeur en $t=1$, et on obtient

$$E(X)=G'_X(1)=q\frac{-np^n(1-p)+p(1-p^n)}{(1-p)^2}+np^n=-np^n+\frac{p}{q}(1-p^n)+np^n.$$

en utilisant le fait que $1-p=q$. On a donc $\boxed{E(X)=\frac{p}{q}(1-p^n)}$.

On a $p\in]0,1[$, donc $\lim\limits_{+\infty}p^n=0$. De plus, $np^n=ne^{n\ln p}$ avec $\ln p<0$, donc par théorème des croissances comparées on a $\lim\limits_{+\infty}np^n=0$. Donc finalement, $\boxed{\lim\limits_{+\infty}E(X)=\frac{p}{q}}$.

Correction 8.

1. À faire.
2. Par définition, $\boxed{P(X\leq 1)=F(1)=\frac{1}{2}}$.

   On a de plus $P(X=1)=0$ car la fonction F n'a pas de saut en 1, donc $\boxed{P(X<1)=P(X\leq 1)=\frac{1}{2}}$.

   On a $P(-2\leq X\leq 0)=P(X\leq 0)-P(X<-2)=F(0)-0$, soit $\boxed{P(-2\leq X\leq 0)=\frac{1}{2}}$.

3. On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 3, 4\}$ car ce sont les points de discontinuité de F. De plus, les probabilités de chaque élément de $X(\Omega)$ sont égale à la valeur du saut de F, soit :
   - $P(X = -2) = F(-2) = \dfrac{1}{4}$,
   - $P(X = 0) = F(0) - F(-2) = \dfrac{1}{4}$,
   - $P(X = 3) = F(3) - F(0) = \dfrac{1}{6}$,
   - $P(X = 4) = F(4) - F(3) = \dfrac{1}{3}$,

   On en déduit
   $$E(X) = -2P(X = -2) + 0P(X = 0) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4)$$
   soit $\boxed{E(X) = \dfrac{4}{3}}$.
   De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Et le théorème du transfert donne
   $$E(X^2) = (-2)^2P(X = -2) + 0^2P(X = 0) + 3^2P(X = 3) + 4^2P(X = 4),$$
   soit $E(X^2) = \dfrac{47}{6}$ et donc $\boxed{V(X) = \dfrac{109}{18}}$.
4. On a $Y(\Omega) = \{-1, 0, \frac{3}{2}, 2\}$, et $Z(\Omega) = \{0, 2, 5, 6\}$ et les probabilités sont les mêmes que précédemment, donc on a
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 2 \leq x < 5 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 6. \end{cases}$$
   Le graphe de F_Z est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 0 du graphe de F, et celui de F_Z le translaté de vecteur $2\mathbf{i}$ de F.

Correction 9.

On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $\mathbf{n \geq 1}$, on note $\mathbf{Y_n}$ le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. **Déterminer $\mathbf{Y_1}$:** À l'issu du premier tirage, un seul numéro a été tiré et il y a donc toujours $N-1$ numéros non encore tirés. Ainsi $Y_1(\Omega) = \{N-1\}$ et $P(Y_1 = N-1) = 1$. $\boxed{\text{La var } Y_1 \text{ est la var certaine égale à } N-1.}$
2. **Soit $\mathbf{n \geq 2}$.**
   (a) **Justifier que $\mathbf{Y_n \leq N - 1}$:**
   Après n tirages, le nombre minimum de numéros sortis est 1 dans le cas où on a toujours tiré le même numéro. Ainsi le nombre maximum de numéros non encore sortis est $N-1$. Ainsi on vient bien de montrer que : $\boxed{Y_n \leq N-1}$. Ainsi on a : $Y_n(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.

(b) **Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $\mathbf{k} \in [\![\mathbf{0}, \mathbf{N}-\mathbf{1}]\!]$, on a**

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y_n}=\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{N}-\mathbf{k}}{\mathbf{N}}\mathbf{P}(\mathbf{Y_{n-1}}=\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{k}+\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\mathbf{P}(\mathbf{Y_{n-1}}=\mathbf{k}+\mathbf{1}).$$

Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$ fixé. Pour obtenir $[Y_n = k]$ lors du tirage n, seulement deux cas sont possibles lors du tirage $n-1$. Soit on a : $[Y_{n-1} = k]$, soit on a : $[Y_n = k+1]$. En effet pour avoir k numéros non encore sortis au tirage n :

- soit il restait déjà k numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un numéro déjà sorti
- soit il restait $k+1$ numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un nouveau numéro jamais sorti.

Puis en utilisant ensuite la formule des probabilités totales, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k] \cap [Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1] \cap [Y_n = k]).$$

Puis d'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([Y_n = k]) = P([Y_{n-1} = k])P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) + P([Y_{n-1} = k+1])P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]).$$

D'après le protocole, on a : $P([Y_{n-1} = k]) \neq 0$ et $P([Y_{n-1} = k+1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{P([Y_{n-1}=k])}$ et $P_{P([Y_{n-1}=k+1])}$ existent bien. On a alors :

- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k]$, il faut choisir lors du tirage n un des $N-k$ numéros déjà sorti lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k]}([Y_n = k]) = \dfrac{N-k}{N}$.
- Pour obtenir $[Y_n = k]$ sachant $[Y_{n-1} = k+1]$, il faut choisir lors du tirage n un des $k+1$numéros pas encore tirés lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $P_{[Y_{n-1}=k+1]}([Y_n = k]) = \dfrac{k+1}{N}$.

On obtient donc bien au final que :

$$\boxed{P(Y_n = k) = \frac{N-k}{N}P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N}P(Y_{n-1} = k+1).}$$

3. **En déduire que la suite $(\mathbf{E}(\mathbf{Y_n}))_{\mathbf{n}\geq\mathbf{1}}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $\mathbf{E}(\mathbf{Y_n})$ pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$.**

- Montrons que la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique :
  Par définition de l'espérance, on a pour tout $n \geq 1$:

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{N-1} kP([Y_n = k]).$$

On utilise alors l'égalitée démontrée à la question précédente afin d'essayer de trouver un lien entre $E(Y_n)$ et $E(Y_{n-1})$. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k\left(\frac{N-k}{N}P(Y_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N}P(Y_{n-1} = k+1)\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k(N-k)P(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k(k+1)P(Y_{n-1} = k+1). \end{aligned}$$

On pose alors le changement de variable $j = k+1$ dans la deuxième somme et on obtient que :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k(N-k)P(Y_{n-1} = k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(k-1)kP(Y_{n-1} = k) \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left[k(N-k) + (k-1)k\right]P(Y_{n-1} = k)\right) + 0 + (N-1)P(Y_{n-1} = N) \\ &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} k(N-1)P(Y_{n-1} = k)\right) \end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles puis en utilisant le fait que $P(Y_{n-1} = N) = 0$ car $Y_n(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$. On obtient alors :

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{N-1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} kP(Y_{n-1} = k) = \frac{N-1}{N} E(Y_{n-1}).}$$

Ainsi la suite $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$.

- Expression de $(E(Y_n))_{n\geq 1}$:
  On obtient donc :

$$\forall n \geq 1,\ E(Y_n) = E(Y_1) \times \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.$$

Mais on a montré à la question 1 que la var Y_1 est la var certaine égale à $N-1$. Ainsi $E(Y_1) = N-1$. On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ E(Y_n) = (N-1) \times \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}.}$$

Correction 10.

Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\frac{1}{3}$ et face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il lance la pièce n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.

1. **Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.**
   On note Y le nombre d'apparitions du pile au cours des n lancers. Comme les expériences sont indépendantes et ont toutes la même probabilités de succès $\frac{1}{3}$, Y suit une loi binomiale : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. On a donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $P(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, $E(Y) = np = \frac{n}{3}$ et $V(Y) = np(1-p) = \frac{2n}{9}$.
   On a de plus $X = \frac{Y}{n}$. On en déduit alors, d'après les propriétés sur l'espérance et la variance : $X(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, et $P\left(X = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$, $E(X) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{1}{3}$ et $V(X) = \frac{V(Y)}{n^2} = \frac{2}{9n}$.

2. **On note p_n la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieure à 0.1. Calculer le nombre de lancers n à effectuer pour que p_n soit inférieure à 0.2.**
   D'après l'énoncé, on a $p_n = P(|X - E(X)| \geq 0.1)$. On cherche la valeur de n à partir de laquelle on a $p_n \leq 0.2$. Or d'après la formule de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$p_n \leq \frac{V(X)}{0.1^2}.$$

   Pour avoir p_n inférieure à 0.2, il suffit donc d'avoir :

$$\frac{V(X)}{0.1^2} \leq 0.2 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{9n \times 0.1^2} \leq 0.2 \ \Leftrightarrow\ n \geq \frac{2}{9 \times 0.1^2 \times 0.2}.$$

   L'application numérique donne $n \geq 112$ lancers.

II Reconnaître les lois usuelles

Correction 11.

1. L'espérance de la loi uniforme est donnée par $E(X) = \frac{q+1}{2}$. On a donc $\frac{q+1}{2} = 5$, soit $\boxed{q = 9}$.
2. On a $E(Y) = np$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$. On doit donc résoudre
$$\begin{cases} np &= \frac{3}{4} \\ \sqrt{np(1-p)} &= \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np &= \frac{3}{4} \\ np(1-p) &= \frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np &= \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}(1-p) &= \frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np &= \frac{3}{4} \\ p &= \frac{1}{4} \end{cases}$$
On obtient donc $\boxed{n = 3,\ p = \frac{1}{4}}$.
3. On a $E(Z) = np$ et $V(Z) = np(1-p)\frac{15-n}{14}$. On doit donc résoudre
$$\begin{cases} np &= \frac{1}{2} \\ \sqrt{np(1-p)\frac{15-n}{14}} &= \frac{5}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-p)(15-n) &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np &= \frac{1}{2} \\ 15-n-15p+np &= 10 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n &= \frac{1}{2p} \\ \frac{1}{2p}+15p-\frac{11}{2} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n &= \frac{1}{2p} \\ 30p^2-11p+1 &= 0 \end{cases}$$
On trouve deux solutions $p = \frac{1}{6}$ ou $p = \frac{1}{5}$. La seule qui donne une valeur entière pour n est la première, et on a donc $\boxed{n = 3,\ p = \frac{1}{6}}$.

Correction 12.

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7 : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.3, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 0.3)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$, $P(X = k) = \binom{20}{k}(0.3)^k(0.7)^{20-k}$, $E(X) = 20 \times 0.3$, $V(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7$.
2. On tire 8 cartes d'un jeu de 52 et on s'intéresse au nombre de carreaux : on a un tirage simultané de 8 cartes parmi 52, et la proportion de cartes gagnantes (les carreaux) est $\frac{1}{4}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{H}(52, 8, \frac{1}{4})}$. On en déduit $X(\Omega) = [\![0, 8]\!]$, $P(X = k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{8-k}}{\binom{52}{8}}$, $E(X) = 2$, $V(X) = \frac{3}{2} \times \frac{44}{51} = \frac{66}{51}$.
3. On lance 5 dés.
   (a) On s'intéresse au nombre de 6 : on a une succession de 5 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$, $P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}^{5-k}\right)5-k$, $E(X) = \frac{5}{6}$, $V(X) = \frac{25}{36}$.
   (b) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé : on tire un numéro au hasard parmi 6 (car le dé est équilibré), donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(6)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$, $E(X) = \frac{7}{2}$, $V(X) = \frac{35}{12}$.
4. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51 : on a une succession de 6 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.51 donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(6, 0.51)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 6]\!]$, $P(X = k) = \binom{6}{k}(0.51)^k(0.49)^{6-k}$, $E(X) = 6 \times 0.51$, $V(X) = 6 \times 0.51 \times 0.49$.

5. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est p, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, p)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 100]\!]$, $P(X = k) = \binom{100}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = 100p$, $V(X) = 100p(1-p)$, où p est la probabilité de voter pour ce candidat.
6. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objet dans le premier tiroir : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{3}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{1}{3})}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$, $P(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$, $E(X) = \frac{20}{3}$, $V(X) = \frac{40}{9}$.
7. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard. Nombre de voyelle dans ce mot : on a un tirage simultané de 5 cartes parmi 26, et la proportion de jetons gagnants (les voyelles) est $\frac{20}{26}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{H}(26, 5, \frac{6}{26})}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 5]\!]$, $P(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{20}{5-k}}{\binom{26}{5}}$, $E(X) = \frac{30}{26}$, $V(X) = \frac{30}{26} \times \frac{20}{26} \times \frac{21}{25}$.
8. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses : on a autant de chance de tirer 0, 1 ou 2 bosses, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 2]\!])}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{3}$, $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{4}{3}$.
9. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{100}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{100})}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 100]\!]$, $P(X = k) = \binom{100}{k} (0.01)^k (0.99)^{100-k}$, $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{99}{100}$.
10. Dans une population de 20 personnes, dont 8 hommes, nombre de femmes présentes dans une délégation de 6 personnes tirées au sort : on a un tirage simultané de 6 personnes parmi 20, et la proportion de perssonnes gagnates (les femmes) est $\frac{12}{20}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{H}(20, 6, \frac{12}{20})}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 6]\!]$, $P(X = k) = \frac{\binom{12}{k}\binom{8}{6-k}}{\binom{20}{6}}$, $E(X) = \frac{18}{5}$, $V(X) = \frac{18}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{14}{19}$.
11. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue : on a autant de chance de tirer n'importe quel numéro, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(128)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![1, 128]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{128}$, $E(X) = \frac{129}{2}$, $V(X) = \frac{128^2 - 1}{12}$.

Correction 13.

On considère une urne contenant 5 boules numérotées : 2 rouges et 3 bleues.

1. On reconnaît une loi hypergéométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{H}(5, 3, \frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{9}{5}$, $V(X) = \frac{9}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}$.
2. On reconnaît une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{9}{5}$, $V(X) = \frac{9}{5} \times \frac{2}{5}$.
3. C'est à nouveau une loi hypergéométrique, et on retrouve le même résultat que pour 1.
4. On reconnaît une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{3}{5})$, $E(X) = \frac{3}{5}$, $V(X) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$.

Correction 14.

1. On a $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$. On a une succession de 10 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{3}{5}$, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{5}$, donc on a $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}}$, $\boxed{E(X) = np = 6}$ et $\boxed{V(X) = np(1-p) = \frac{12}{5}}$.

2. On note Y la variable aléatoire égale au temps du parcours en minutes. Le temps sans faute est de $2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ heure, soit 12 minutes, et on enlève 30 secondes par faute, soit $\frac{1}{2}$ minute. Comme le nombre de fautes est $10 - X$, on a $Y = 12 + \frac{1}{2}(10 - X)$. Comme l'espérance est linéaire, on a

$$E(Y) = 12 + \frac{1}{2}(10 - E(X))$$

soit $\boxed{E(Y) = 14}$: le temps moyen d'un parcours est de 14 minutes.

III Exercices généraux

Correction 15.

Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante : le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr. S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$. S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr. Soit $\mathbf{X_i}$ la varf de Bernouilli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. **Former une relation de récurrence entre $\mathbf{P([X_{i+1} = 1])}$ et $\mathbf{P([X_i = 1])}$:**
Les évènements $([X_i = 0], [X_i = 1])$ forment le sce associé à la var de Bernouilli X_i. Ainsi on obtient en utilisant la formule des probabilités totales que :

$$P([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0] \cap [X_{i+1} = 1]) + P([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1]).$$

D'après le protocole, on a : $P([X_i = 0]) \neq 0$ et $P([X_i = 1]) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $P_{[X_i=0]}$ et $P_{[X_i=1]}$ existent bien. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :

$$P([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0])P_{[X_i=0]}([X_{i+1} = 1]) + P_{[X_i=1]}([X_{i+1} = 1]) = P([X_i = 0]) + \frac{1}{2}P([X_i = 1]).$$

Comme de plus $P([X_i = 0]) = 1 - P([X_i = 1])$, on obtient que :

$$\boxed{P([X_{i+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{2}P([X_i = 1]).}$$

2. **En déduire la loi de $\mathbf{X_i}$ pour tout $\mathbf{i \in [\![1, 365]\!]}$:**
   - Pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$, on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i)$ avec $p_i = P([X_i = 1])$. Ainsi pour connaître la loi de X_i, il suffit de connaître p_i à savoir de calculer $P([X_i = 1])$.
   - Calcul de p_i :
   La question précédente donne que :

   $$\forall i \in [\![1, 365]\!], \quad p_{i+1} = 1 - \frac{1}{2}p_i.$$

   On reconnaît ainsi une suite arithmético-géométrique. On ne détaille pas les calculs mais on obtient au final :

   $$\boxed{\forall i \in [\![1, 365]\!], \quad p_i = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}.}$$

   - Ainsi, on a : $\boxed{\forall i \in [\![1, 365]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right).}$

3. **Soit X la varf égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer E(X) :**
On remarque que : $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient que : $E(X) = \sum_{i=1}^{365} E(X_i)$. De plus comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\frac{2}{3}\right)$, on a : $E(X_i) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\frac{2}{3}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{365}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}+\frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{-2}{3}\sum_{i=1}^{365}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i}+\frac{2}{3}\times 365 \\ &= \boxed{\frac{2}{9}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{365}\right)+\frac{730}{3}.} \end{aligned}$$

Correction 16.

On lance m dés non truqués.

1. **Soit $\mathbf{X_1}$ la var égale au nombre de dé amenant le 6. Donner sans calcul la loi de $\mathbf{X_1}$ son espérance et sa variance :**
On reconnaît une loi binomiale car X_1 est un nombre de succés, le succés correspondant à obtenir le chiffre 6 et l'expérience revient bien à répéter m fois la même expériences dans les mêmes conditions (car tous les dés sont identiques). On a ainsi $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{6}\right).}$ On a ainsi :
$$\forall k \in [\![0,m]\!],\ P([X_1=k]) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}.$$
De plus, on a : $E(X_1) = \frac{m}{6}$ et $V(X_1) = \frac{5m}{36}$.
2. **On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit $\mathbf{X_2}$ le nombre de ceux qui amènent 6 lors de la deuxième relance. Donner la loi de $\mathbf{X_2}$ son espérance et sa variance. On pourra montrer en particulier que : $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{l}}\binom{\mathbf{m-l}}{\mathbf{k}} = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{m-k}}{\mathbf{l}}$.**
   - On peut commencer par vérifier l'égalitée des coefficients binomiaux donnée.
     - ⋆ D'un côté, on a : $\binom{m}{l}\binom{m-l}{k} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-l)!$.
     - ⋆ De l'autre côté, on a : $\binom{m}{k}\binom{m-k}{l} = \frac{m!}{l!k!(m-l-k)!}$ en simplifiant par $(m-k)!$.

     Ainsi on a bien que : $\boxed{\binom{m}{l}\binom{m-l}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{l}.}$
   - Loi de X_2 :
     - ⋆ Univers image : $\boxed{X_2(\Omega) = [\![0,m]\!].}$
     - ⋆ Loi :
     Soit $k \in X_2(\Omega)$. On remarque que pour calculer $P([X_2=k])$, on a besoin de connaître le nombre de dés que l'on relance lors de la deuxième relance. Et ainsi on a besoin de connaître le nombre de dés qui ont amené 6 lors du premier lancer. On utilise donc le sce associé à la var X_1. Ainsi comme $([X_1=0];[X_1=1];[X_1=2];\dots;[X_1=m])$ est un sce on a d'après la formule des probabilités totales :
     $$P([X_2=k]) = \sum_{l=0}^{m} P([X_1=l]\cap[X_2=k]).$$

Puis comme d'après la question 1, on a bien que pour tout $l \in [\![0, m]\!]$: $P([X_1 = l]) \neq 0$, les probabilités conditionnelles $P_{[X_1=l]}$ existent toutes. Ainsi on obtient d'après la formule des probabilités composées :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^{m} P([X_1 = l]) P_{[X_1=l]}([X_2 = k]).$$

En utilisant la question 1, on obtient que : $\forall l \in [\![0, m]\!]$, $P([X_1 = l]) = \binom{m}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l}$.

Puis on a : $P_{[X_1=l]}([X_2 = k]) = \binom{m-l}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k}$ car on sait que l'on relance alors $m - l$ dés. On peut alors calculer la somme et on obtient que :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l} \binom{m-l}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{m-l-k} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{m-k}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^{l+k} \left(\frac{5}{6}\right)^{2m}$$

en utilisant l'égalité sur les coefficients binomiaux démontrée ci-dessus. On sort alors tout ce qui ne dépend pas de l indice de sommation et on obtient que :

$$P([X_2 = k]) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^{m} \binom{m-k}{l} \left(\frac{1}{6}\right)^l \left(\frac{5}{6}\right)^{-2l} = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^{m} \binom{m-k}{l} \left(\frac{6}{25}\right)$$

Comme, pour tout $l > m - k$, on a : $\binom{m-k}{l} = 0$, on obtient alors en utilisant la relation de Chasles que :

$$P([X_2 = k]) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \sum_{l=0}^{m-k} \binom{m-k}{l} \left(\frac{6}{25}\right)^l.$$

On reconnaît alors le binôme de Newton et on obtient que :

$$\begin{aligned} P([X_2 = k]) &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k} \left(\frac{6}{25} + 1\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^m \left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^k \left(\frac{25}{36}\right)^{m-k} \left(\frac{31}{25}\right)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} \left(\frac{5}{36}\right)^k \left(\frac{31}{36}\right)^{m-k}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{31}{36} = 1 - \frac{5}{36}$, on reconnaît alors l'expression d'une loi binomiale et ainsi on a : $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{5}{36}\right).}$

- Espérance et variance de X_2 : On obtient que $E(X_2) = \frac{5m}{36}$ et $V(X_2) = \frac{155m}{36^2}$.

Correction 17.

Dans un jeu télévisé, le candidat doit répondre à 20 questions. Pour chacune d'elles, l'animateur propose au candidat trois réponses possibles, une seule étant la réponse exacte. Les questionnaires sont établis de façon que l'on puisse admettre que :

- un candidat retenu pour participer au jeu connaît la réponse exacte pour 60% des questions et donne une réponse au hasard pour les autres.
- Les questions posées lors du jeu sont indépendantes.

1. On note C_i l'événement « le candidat connaît la réponse à la i-ème question ». On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_i) = P(E_i \cap C_i) + P(E_i \cap \overline{C}_i).$$

De plus, $P(C_i) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \neq 0$, donc les probabilités conditionnelles existent et on a

$$P(E_i) = P_{C_i}(E_i)P(C_i) + P_{\overline{C}_i}(E_i)P(\overline{C}_i) = 1 \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5},$$

car si le joueur connaît la réponse, il l'a donne à coup sûr, et sinon il a une chance sur 3 (équiprobabilité) de trouver la bonne réponse. On a donc finalement $\boxed{P(E_i) = \frac{11}{15}}$.

2. On a $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$. La varf X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{11}{15}$. On en déduit que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, soit $\boxed{P(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}}$.

3. On a alors $E(X) = np = 20 \times \frac{11}{15}$.

Correction 18.

Une puce se déplace sur un axe par sauts indépendants et d'amplitude 1, aléatoirement vers la gauche ou la droite. Soit $\mathbf{X_n}$ sa position après n sauts (elle commence à la position 0). Soit $\mathbf{Y_n}$ le nombre de fois où elle a sauté vers la droite au cours des n premiers sauts.

1. **Donner la loi de $\mathbf{Y_n}$:**
   On reconnaît une loi binomiale car Y_n est un nombre de succès, le succès étant sauter vers la droite et que l'on répète bien n fois la même expérience dans les mêmes conditions. Ainsi on a : $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$. En effet il y a équiprobabilité de sauter à droite ou à gauche et ainsi la probabilité de sauter vers la droite vaut bien $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P([Y_n = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \boxed{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

2. **Après avoir exprimer $\mathbf{X_n}$ en fonction de $\mathbf{Y_n}$, donner la loi de $\mathbf{X_n}$.**
   - La position de la puce après n sauts en ayant commencé à 0 correspond au nombre de sauts faits à droite moins le nombre de sauts effectués à gauche. Or si Y_n est le nombre de sauts effectués à droite, $n - Y_n$ correspond alors au nombre de sauts effectués à gauche. Ainsi on a :

$$\boxed{X_n = Y_n - (n - Y_n) = 2Y_n - n.}$$

   - Univers image de X_n : la plus petite valeur atteinte est $-n$ (que des sauts à gauche), et la plus grande n (que des sautes à droite). Ainsi $X_n(\Omega) = [\![-n, n]\!]$. On peut cependant remarquer que tous les entiers entre $-n$ et n ne peuvent être atteints. Si n est pair, seuls les entiers pairs peuvent être atteints, et si n est impair, seuls les entiers impairs peuvent être atteints !
   - Loi de X_n : Soit $k \in [\![-n, n]\!]$ fixé. On a :

$$P(X_n = k) = P(2Y_n - n = k) = P\left(Y_n = \frac{n+k}{2}\right).$$

   Comme on connaît la loi de Y_n, on va pouvoir en déduire la loi de X_n. Pour cela il faut déjà savoir si, lorsque $k \in [\![-n, n]\!]$, on a : $\frac{n+k}{2} \in Y_n(\Omega)$, à savoir si : $\frac{n+k}{2} \in [\![0, n]\!]$.

   ⋆ Comme $k \in [\![-n, n]\!]$, on a : $0 \leq n + k \leq 2n$ et ainsi : $0 \leq \frac{n+k}{2} \leq n \Leftrightarrow \frac{n+k}{2} \in [0, n]$.

- ⋆ Mais il faut faire attention car $\dfrac{n+k}{2}$ n'est pas forcément un entier et ainsi on n'a pas forcément que : $\dfrac{n+k}{2} \in [\![0, n]\!]$.

On doit donc distinguer deux cas selon que $n+k$ est pair ou imapir :

- ⋆ CAS 1 : si k est tel que $n+k$ est impair :
  Alors $\dfrac{n+k}{2}$ n'est pas un entier et ainsi $\dfrac{n+k}{2} \notin Y_n(\Omega)$ et donc $P(X_n = k) = P\left(Y_n = \dfrac{n+k}{2}\right) = 0$.
- ⋆ CAS 2 : si k est tel que $n+k$ est pair :
  Alors $\dfrac{n+k}{2}$ est un entier et ainsi $\dfrac{n+k}{2} \in Y_n(\Omega)$ et donc $P(X_n = k) = P\left(Y_n = \dfrac{n+k}{2}\right) = \dbinom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On obtient ainsi la loi de X_n :

$$\boxed{\forall k \in [\![-n, n]\!],\ P(X_n = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{si } n+k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n+k \text{ impair.} \end{cases}.}$$

3. **On suppose que n est pair. Quelles est la probabilité $\mathbf{p_n}$ que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? Étudier la convergence de la suite $\mathbf{(p_n)_{n\in\mathbb{N}}}$**
   On admettra la formule de Stirling : $\mathbf{n! \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}}$.

   - Calcul de p_n :
     On cherche à calculer $p_n = P(X_n = 0)$. Comme n est pair par hypothèse, on a bien : $n + k = n$ qui est toujours pair et ainsi on obtient d'après la question précédente que :

     $$\boxed{p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

   - Étude de la convergence :
     On utilise pour cela la formule de Stirling et on obtient que :

     $$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\left(\frac{e^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}\right)^2.$$

     Or on a :

     $$\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\left(\frac{e^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\,\frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n n\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}2^n.$$

     Ainsi on obtient que :

     $$p_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

     car $p_n = \dbinom{n}{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. $\boxed{\text{Ainsi la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

Correction 19.

Une urne contient n boules : m sont blanches et les autres sont noires ($\mathbf{1 \leq m < n}$). On effectue des tirages sans remise jusqu'à ce que l'on ait obtenu toutes les boules blanches. On note Y le nombre de tirages effectués.

1. **Pour tout $\mathbf{i \in [\![0, n]\!]}$, on note $\mathbf{X_i}$ le nombre de boules blanches obtenues au cours des i premiers tirages. Quelle est la loi de $\mathbf{X_i}$?**
   On reconnaît une loi hypergéométrique car les tirages se font sans remise et que l'on cherche

bien un nombre de succés, le succés correspondant à obtenir une boule blanche. Ainsi on a : $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{H}\left(n, i, \frac{m}{n}\right).}$ Ainsi on a $X_i(\Omega) \subset [\![0, i]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0, i]\!],\ P([X_i = k]) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{i-k}}{\binom{n}{i}}.$$

2. **Exprimer, pour tout $\mathbf{k} \in [\![\mathbf{2}, \mathbf{n}]\!]$, l'événement $[\mathbf{Y} \leq \mathbf{k}]$ en fonction de $\mathbf{X_k}$. Calculer alors $\mathbf{P}([\mathbf{Y} \leq \mathbf{k}])$. En déduire la loi de Y :**
   - On remarque que : $\boxed{[Y \leq k] = [X_k = m]}$ car l'évènement $[Y \leq k]$ correspond à ce que toutes les boules blanches aient été tirées au plus au tirage k (mais elles ont pû être toutes tirées avant le tirage k). Toutes les boules blanches sont été tirées au plus au tirage k correspond donc bien à ce que le nombre de boules blanches tirées en k tirages soit égal à m à savoir au nombre total de boules blanches.
   - Comme on connaît la loi de X_k, on en déduit $P([Y \leq k])$. On obtient donc : $P([Y \leq k]) = P([X_k = m]) = \frac{\binom{m}{m}\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}} = \boxed{\frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}}.}$
   - Loi de Y :
     - ⋆ Univers image de Y : on a : $\boxed{Y(\Omega) = [\![m, n]\!]}$ car dans le meilleur des cas on tire d'abord toutes les boules blanches et il faut donc m tirages pour les avoir toutes et dans le pire des cas, on commence par exemple d'abord par tirer toutes les boules noires et seulement ensuite les boules blanches et il faut alors n tirages.
     - ⋆ Comme on connaît $P([Y \leq k])$ pour tout $k \in Y(\Omega)$, on peut donc en déduire la fonction de répartition de Y. Et comme ici on veut la loi de Y, il faut donc donner le lien entre des évènements type $[Y \leq K]$ et des évènements type $[Y = k]$. Ce raisonnement est classique et doit être connu.
       - ◦ Passage de la fonction de répartition à la loi :
         On a : $[Y \leq k] = [Y = k] \cup [Y < k] = [Y = k] \cup [k-1 < Y < k] \cup [Y \leq k-1]$. Comme $[k-1 < Y < k] = \emptyset$, on obtient que : $[Y \leq k] = [Y = k] \cup [Y \leq k-1]$. Puis comme ces deux évènements sont deux à deux incompatibles, on obtient que

         $$P([Y \leq k]) = P([Y = k]) + P([Y \leq k-1]) \Leftrightarrow \boxed{P([Y = k]) = P([Y \leq k]) - P([Y \leq k-1]).}$$

       - ◦ Cette égalité nous permet d'obtenir la loi de Y :
         Si $k = m$ alors $[Y \leq k-1] = \emptyset$ et ainsi : $\boxed{P([Y = m]) = P([Y \leq m]) = \frac{1}{\binom{n}{k}}}$ car $\binom{n-m}{0} = 1$.
         Si $k \in [\![m+1, n]\!]$ alors $P([Y = k]) = P([Y \leq k]) - P([Y \leq k-1]) = \frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k}} - \frac{\binom{n-m}{k-1-m}}{\binom{n}{k-1}}$. Si on écrit les coefficients binomiaux sous forme de factorielle et que l'on fait quelques calculs en factorisant, on obtient que :

         $$\forall k \in [\![m+1, n]\!],\ P([Y = k]) = m\frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!}.$$

         On peut d'ailleurs remarquer que cette formule est aussi vraie pour $k = m$ car $m\frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!} = m\frac{(n-m)!(m-1)!}{n!(m-m)!} = \frac{(n-m)!m!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m}}$. On obtient donc au final que :

         $$\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ P([Y = k]) = m\frac{(n-m)!(k-1)!}{n!(k-m)!}.}$$

3. **Retrouver le résultat ci-dessus en calculant directement la loi sans passer par la fonction de répartition. On pourra exprimer l'évènement $[\mathbf{Y = k}]$ avec $\mathbf{X_{k-1}}$ et $\mathbf{B_k}$ avec $\mathbf{B_k}$ l'évènement « tirer une boule blanche au tirage k » :**
   - On peut remarquer que : $\boxed{[Y = k] = [X_{k-1} = m-1] \cap B_k}$ car l'évènement $[Y = k]$ correspond à tirer la dernière boule blanche au tirage k. Pour cela, il faut bien avoir B_k et avoir tiré toutes les autres boules blanches avant à savoir avoir tiré $m-1$ boules blanches lors des $k-1$ premiers tirages.
   - On obtient donc $P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m-1] \cap B_k)$. Puis d'après la formule des probabilités composées, on obtient que : $P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m-1])P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k)$ car $P([X_{k-1} = m-1]) \neq 0$ d'après la question 1 et ainsi la probabilité conditionnelle $P_{[X_{k-1}=m-1]}$ existe bien. On a toujours d'après la question 1 que $P([X_{k-1} = m-1]) = \dfrac{\binom{m}{m-1}\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}} = m\dfrac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}}$. Il reste donc à calculer $P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k)$. Lors du k-ième tirage il reste dans l'urne 1 boule blanche et $n-k+1$ boules en tout. Ainsi on a : $P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$. Au final on a donc obtenu que :

$$\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ P([Y = k]) = P([X_{k-1} = m-1])P_{[X_{k-1}=m-1]}(B_k) = \frac{m}{n-k+1}\frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}}.}$$

   - Il reste alors à vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans la question précédente. Pour cela on écrit les deux coefficients binomiaux sous la forme de factorielle et on obtient que :

$$\frac{m}{n-k+1}\frac{\binom{n-m}{k-m}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{m}{n-k+1}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = m\frac{(n-m)!(k-1)!(n-k)!}{n!(k-m)!(n-k)!} = m\frac{(n-m)!(k}{n!(k-}$$

   On retrouve bien le même résultat que dans la question 2.

4. **On suppose $\mathbf{m = 1}$, donner explicitement la loi de $\mathbf{Y}$. Même question si $\mathbf{m = 2}$.**
   - **Pour $\mathbf{m = 1}$:**
     - ⋆ Univers image : $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, n]\!].}$
     - ⋆ Loi de Y : soit $k \in Y(\Omega)$. On a : $[Y = k] = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$ avec notations évidentes. Puis d'après la formule des probabilités composées et sous réserve d'existence des probabilités conditionnelles, on obtient que :

$$P([Y = k]) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)\dots P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k).$$

       De plus $P(N_1) = \dfrac{n-1}{n} \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{N_1} existe bien. Puis d'après la formule des probabilités composées, on a : $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} = \dfrac{n-2}{n} \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle $P_{N_1\cap N_2}$ existe bien. En itérant le raisonnement on peut alors montrer que toutes les probabilités conditionnelles existent bien. On obtient alors :

$$P([Y = k]) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\dots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

       Ainsi on reconnaît une loi uniforme : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n).}$
   - **Pour $\mathbf{m = 2}$:**
     On peut ici utiliser le résultat de la question 3 avec $m = 2$. On obtient alors :
     - ⋆ Univers image : $\boxed{Y(\Omega) = [\![2, n]\!].}$
     - ⋆ Loi de Y : soit $k \in Y(\Omega)$. On a :

$$P([Y = k]) = 2\frac{(n-2)!(k-1)!}{n!(k-2)!} = \boxed{\frac{2(k-1)}{n(n-1)}.}$$

Correction 20.

1. Soit X (resp. Y) le nombre de piles effectués par le premier joueur (resp. le deuxième joueur). On a

$$P(X=Y)=P(([X=0]\cap[Y=0])\cup([X=1]\cap[Y=1])\cup\ldots\cup([X=n]\cap[Y=n])).$$

Or ces événements sont 2 à 2 incompatibles, donc on a

$$P(X=Y)=P([X=0]\cap[Y=0])+P([X=1]\cap[Y=1])+\ldots+P([X=n]\cap[Y=n]).$$

De plus, les jeux sont indépendants donc on a $P([X=k]\cap[Y=k])=P(X=k)\times P(Y=k)$. Or X et Y suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc

$$P(X=k)=P(Y=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a donc finalement :

$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}$$

d'après la formule de Vandermonde.

2. On a $P(X\neq Y)=1-P(X=Y)$. Donc $\boxed{P(X\neq Y)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n}}$.

De plus, comme $P(X>Y)=P(X<Y)$, on a $P(X>Y)=\frac{1}{2}P(X\neq Y)=\boxed{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n}{n}}$.