

# Table des matières

<b>I Définitions et premières propriétés</b>	<b>1</b>
I. 1 Définitions . . . . .	1
I. 2 Premières propriétés . . . . .	2
I. 3 Opérations sur les applications linéaires . . . . .	3
<b>II Noyau et image d'une application linéaire</b>	<b>5</b>
II. 1 Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire . . . . .	5
II. 2 Lien avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire . . . . .	6
<b>III Les différents liens entre les matrices et les applications linéaires</b>	<b>7</b>
III. 1 Matrices associées à une application linéaire . . . . .	7
III. 2 Lien entre les opérations sur les applications linéaires et les matrices . . . . .	9
III. 3 Calcul du noyau et de l'image d'une application linéaire grâce aux matrices. . . . .	10
<b>IV Rang d'une application linéaire</b>	<b>11</b>
IV. 1 Définition du rang d'une application linéaire . . . . .	11
IV. 2 Théorème du rang et conséquences . . . . .	12

## Chapitre : Applications lineaires

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I Définitions et premières propriétés

#### I. 1 Définitions

Définition d'une application linéaire

**Définition 1.** Soit  $E = \mathbb{K}^n$  et  $F = \mathbb{K}^p$  avec  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

- Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$  si
  
- L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté .....

**Méthodes pour montrer que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$**

- Vérifier que  $f$  va bien de l'espace  $E$  dans l'espace  $F : f : E \rightarrow F$ .
- Soit  $u \in E$ , soit  $v \in E$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrer que  $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ .

- Exercice 2.**
1. Montrer que  $f(x, y, z) = (y, 0, x + z, 3x + y - 2z)$  est une application linéaire.
  2. Soit  $f$  définie par  $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y, 4z)$ . Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ .
  3. Soit  $g$  l'application définie par  $g(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x - z)$ . Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ .

- Exemples.**
- L'application nulle :  $f : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p \\ u \mapsto \dots \end{cases}$  est une application linéaire.
  
  - L'application identité :  $Id : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \\ u \mapsto \dots \end{cases}$  est une application linéaire.

- Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on appelle homothétie vectorielle dans  $\mathbb{K}^n$  de rapport  $\alpha$ , l'application :  $f : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ u & \mapsto & \dots \end{cases}$

Les homothéties sont des applications linéaires.

- La projection canonique par rapport à la  $i$ -ème coordonnée est définie par  $\pi_i : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \dots \end{cases}$ .

C'est une application linéaire.

**Définition 3. Définitions supplémentaires :**

- Une application linéaire de  $E$  vers  $E$  est appelée .....
- L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté .....
- Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  qui est bijective de  $E$  sur  $F$  s'appelle .....
- Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  qui est bijective de  $E$  sur  $E$  s'appelle .....

**Exercice 4.** Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  avec  $f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + 3y - 5z, x + y + z)$ .

I. 2 Premières propriétés

**Proposition 5.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E = \mathbb{K}^n$  et  $F = \mathbb{K}^p$  ( $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls). On a :

- $f(0_E) =$
- Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , pour toute famille de vecteurs  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ , pour tous scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ , on a :

**Preuve**

**Méthodes pour montrer qu'une fonction n'est pas une application linéaire**

- Méthode 1 : montrer que  $f(0_E) \neq 0_F$   
(car si  $f$  est une application linéaire alors on a forcément  $f(0_E) = 0_F$ ).
- Méthode 2 : trouver un contre-exemple : trouver  $u \in E, v \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(\lambda u + v) \neq \lambda f(u) + f(v)$ .

**Exercice 6.** 1. Soit  $f$  définie par :  $f(x, y, z) = (x + y + z + 1, z)$ . Étude de la linéarité de  $f$ .

2. Soit  $h$  une application définie par :  $h(x, y, z) = x^2 + y + z$ . Étudier la linéarité de  $h$ .

### I. 3 Opérations sur les applications linéaires

**Proposition 7. Somme et multiplication par un scalaire**

- Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ , alors .....
- Autrement dit :
  - ★ La somme de deux applications linéaires est .....
  - ★ La multiplication d'une application linéaire par un scalaire est .....

**Preuve**

**Remarque.** Ainsi, comme vous le verrez en BCPST2,  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est .....

**Exercice 8.** On définit

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y, 7z) \end{cases} \quad \text{et} \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (y + 2z, 3x + y - z). \end{cases}$$

Montrer que  $u$  et  $v$  sont bien des applications linéaires et calculer  $2u - 3v$ .

Composition des applications linéaires

**Proposition 9.** Soient  $E = \mathbb{K}^q$ ,  $F = \mathbb{K}^p$  et  $G = \mathbb{K}^n$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  alors

La composition de deux applications linéaires est .....

**Preuve**



## II Noyau et image d'une application linéaire

### II. 1 Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire

**Définition 15.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Le noyau de  $f$  est le sous-ensemble de  $E$  (espace de départ) noté  $\ker(f)$  et défini par
  
- L'image de  $f$  est le sous-ensemble de  $F$  (espace d'arrivée) noté  $\text{Im}(f)$  et défini par

**Proposition 16.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- L'ensemble  $\ker(f)$  .....
- L'ensemble  $\text{Im}(f)$  .....

**Preuve**

**Méthode pour déterminer une base et la dimension de  $\ker(f)$**

On a :  $\ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$ .

- $u \in \ker f \iff f(u) = 0_F$ . On écrit le système linéaire que l'on doit résoudre.
- On échelonne le système linéaire.
- On trouve alors l'écriture vectorielle de  $\ker(f)$  et on en déduit une base et la dimension de  $\ker(f)$ .

**Exercice 17.** Montrer que ces applications sont des applications linéaires et déterminer une base et la dimension de leur noyau.

1.  $f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, 2x + y - 2z)$ .

2.  $f(x, y, z) = (x - y + z, x + 2y - z, 2x + z)$
3.  $f(x, y, z) = (x - y - 3z, 2x - z, x + y + 2z)$ .
4.  $f(x, y, z, t) = (-y, my, x - mz - t, y)$ , avec  $m$  paramètre réel.

**Méthode 1 pour déterminer une base et la dimension de  $\text{Im}(f)$**

- On écrit  $\text{Im} f = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\}$ , et on obtient une écriture paramétrique de  $\text{Im} f$ .
- On en déduit la forme vectorielle, donc une famille génératrice de  $\text{Im} f$  : attention, cette famille n'est pas nécessairement une base !
- On extrait de cette famille une base de  $\text{Im} f$ .

**Méthode 2 pour déterminer une base et la dimension de  $\text{Im}(f)$**

- On écrit  $v \in \text{Im} f \iff \exists u \in E, v = f(u)$ , et on échelonne le système linéaire correspondant.
- On cherche les équations de compatibilité : s'il en existe, ce sont le(s) équation(s) cartésienne(s) de  $\text{Im} f$ .
- On passe de l'écriture cartésienne à l'écriture vectorielle afin d'obtenir une base et la dimension de  $\text{Im} f$ .

**Exercice 18.** Déterminer une base et la dimension de l'image des applications linéaires de l'exercice 7.

*II. 2 Lien avec l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité d'une application linéaire*

---

**Proposition 19.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est injective de  $E$  dans  $F$  si et seulement si .....

**Remarque.** On a toujours  $\{0_E\} \subset \ker f$  car .....

Ainsi, pour montrer que  $\ker f = \{0_E\}$ , il suffit de montrer que .....

**Preuve**

**Méthode pour montrer l'injectivité d'une application linéaire :**  
calculer le noyau.

- Si  $\ker(f) = \{0_E\}$  alors  $f$  est injective de  $E$  dans  $F$ .
- Sinon  $f$  n'est pas injective de  $E$  dans  $F$ .

**Exercice 20.** 1. Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y) = (x - y, x + y, 2y - x)$ . Montrer que  $f$  est linéaire. L'application  $f$  est-elle injective ?

2. Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y, z) = (2x - z, y + 2z)$ . Montrer que  $f$  est linéaire. L'application  $f$  est-elle injective?

**Proposition 21.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

$f$  est surjective de  $E$  dans  $F$  si et seulement si .....

**Remarque.** On a toujours .....

Ainsi, pour montrer que  $\text{Im}(f) = F$ , il suffit de montrer que .....

**Preuve**

**Méthodes pour montrer la surjectivité d'une application linéaire :** calculer l'image.

- Si  $\text{Im}(f) = F$  alors  $f$  est surjective de  $E$  dans  $F$ .
- Sinon  $f$  n'est pas surjective de  $E$  dans  $F$ .

- Exercice 22.** 1. Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y) = (x - y, x + y, 2y - x)$ . Montrer que  $f$  est linéaire. L'application  $f$  est-elle surjective?
2. Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y, z) = (2x - z, y + 2z)$ . Montrer que  $f$  est linéaire. L'application  $f$  est-elle surjective?

**Proposition 23.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

$f$  est un automorphisme de  $E$  si et seulement si .....

**Méthodes pour déterminer la bijectivité d'une application linéaire et calculer  $f^{-1}$**

- On montre que  $f$  est à la fois injective et surjective.
- Pour le calcul de  $f^{-1}$  : on prend un vecteur  $v \in F$ , et on cherche  $u \in E$  tel que  $v = f(u)$ .
- On échelonne le système linéaire correspondant afin d'exprimer les coordonnées de  $u$  en fonction des coordonnées de  $v$ .
- Comme  $v = f(u) \Leftrightarrow u = f^{-1}(v)$ , on en déduit l'expression de  $f^{-1}$ .

- Exercice 24.** Soit  $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, y + z)$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et calculer  $f^{-1}$ .

### III Les différents liens entre les matrices et les applications linéaires

---

#### III. 1 Matrices associées à une application linéaire

---

Passage de l'application linéaire aux matrices

**Définition 25. Matrices d'une application linéaire**

- Soient  $E = \mathbb{K}^n$  et  $F = \mathbb{K}^p$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
 On fixe  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$  une base de  $F$ .  
 On appelle matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  notée .....

Ainsi la  $j$ -ième colonne de  $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  représente les coordonnées du vecteur  $f(u_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

- Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  base de  $E$ , on appelle matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice définie par  $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ .

- On calcule les vecteurs  $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ . Le plus souvent, on les obtient dans la base canonique de  $F$ .
- On calcule (si besoin) les coordonnées de ces vecteurs dans la base  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ .
- On remplit colonne par colonne la matrice associée à  $f$ .

- Exercice 26.**
1. Soit  $f$  définie par :  $f(x, y, z) = (2x - y, x + z)$ .
    - ★ Calculer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ .
    - ★ On pose  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  avec  $f_1(1, 0, 0)$ ,  $f_2(1, 1, 0)$ ,  $f_3(1, 1, 1)$  et  $\mathcal{D} = (u_1, u_2)$  avec  $u_1(1, 0)$  et  $u_2(1, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont respectivement des bases de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .
  2. Soit  $f$  définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - y - z)$ .
    - ★ On considère les bases canoniques  $\mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  et de  $\mathbb{R}^2$ . Donner la matrice  $M$  de  $f$  relativement à ces bases.
    - ★ On garde maintenant pour  $\mathbb{R}^2$  la base canonique mais on prend pour  $\mathbb{R}^3$  la base suivante :  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  définie par  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, -1)$  et  $u_3 = (1, 1, 0)$ . Calcul de  $M_1 = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}(f)$ .
    - ★ On prend maintenant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on prend la base  $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$  pour  $\mathbb{R}^2$  définie par  $v_1 = (1, 1)$  et  $v_2 = (1, -1)$ . Calcul de  $M_2 = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{C}}(f)$ .

**Passage de la matrice à l'application linéaire canoniquement associée**

**Définition 27. Application linéaire canoniquement associée à une matrice**

Si  $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  est une matrice fixée, on appelle application linéaire canoniquement associée à  $A$

l'application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  telle que  $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_p)$ , où :

**Méthode pour trouver  $f$  canoniquement associée à  $A$  :**  
 Calculer  $AX$ .

- Exercice 28.**
1. On considère la matrice suivante  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer l'application linéaire  $f$  canoniquement associée à  $A$ .

2. Faire de même avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 29.** Calcul de l'image d'un vecteur grâce aux matrices.

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice relativement à la base canonique  $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcul de  $f(u)$  avec  $u = (1, 0, -1)$ .

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  de matrice relativement à la base canonique  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calcul de  $f(u)$  avec  $u = (3, 4)$ .

### III. 2 Lien entre les opérations sur les applications linéaires et les matrices

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $h \in \mathcal{L}(F, G)$ . On fixe les bases  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$  et  $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_r)$  respectivement bases de  $E$ ,  $F$  et de  $G$  et on note  $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ ,  $B = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$  et  $C = M_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(h)$ .

**Proposition 30.** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

La matrice de l'application linéaire  $\alpha f + \beta g$  dans les bases  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est .....

**Exercice 31.** On définit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  avec  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ . Et soit  $g$  l'application linéaire définie par :  $g(x, y, z, t) = (x - y - z + 2t, 5x - 6y + 3t, x - z + 2t)$ . Calculer  $2f - 3g$ .

**Proposition 32. Composition d'applications linéaires**

La matrice de l'application linéaire  $h \circ f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{D}$  est .....

**Proposition 33. Cas particulier important des endomorphismes**

Ici  $E = F$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\mathcal{B}$  base de  $E$  et  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice de l'application linéaire  $f^n$  dans la base  $\mathcal{B}$  est .....

**Exercice 34.** 1. On définit les applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y - 2z, -x + 3y - z) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (2x - y, x + 3y) \end{cases}$$

Donner l'expression analytique de  $g \circ f$ . Puis déterminer les matrices de  $f$ ,  $g$  et  $g \circ f$  dans les bases canoniques. Vérifier sur cet exemple la propriété ci-dessus.

2. On définit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  avec  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Donner  $f^3$ .

3. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  et  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Traduire matriciellement l'égalité  $f^2 - 2f + Id_{\mathbb{R}^3} = 0$ .

**Proposition 35.** On a l'équivalence suivante :

$f$  bijective de  $E$  dans  $F \iff$  .....

Et dans ce cas la matrice de  $f^{-1}$  est .....

**Méthode matricielle pour étudier la bijectivité de  $f$**

- On calcule la matrice  $A$  de  $f$  canoniquement associée.
- On étudie l'inversibilité de  $A$ .
- Si  $A$  est inversible, alors  $f$  est bijective de  $E$  dans  $F$  et  $f^{-1}$  est canoniquement associée à  $A^{-1}$ .

- Exercice 36.** 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Montrer que  $f$  est bijective et calculer  $f^{-1}$ .
2. Montrer que l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 3x + 5y + 4z, 2x + y + 5z)$  est bijective et calculer l'expression de  $f^{-1}$  par les deux méthodes disponibles.

**Conclusion**

- $f + g$  se traduit matriciellement par  $A + B$ .
- $\lambda f$  se traduit matriciellement par  $\lambda A$ .
- $h \circ f$  se traduit matriciellement par  $C \times A$ .
- $f \circ f$  se traduit matriciellement par  $A^2$ .
- $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$  se traduit matriciellement par  $A^n$ .
- $f$  bijective  $\Leftrightarrow A$  inversible et alors  $f^{-1}$  se traduit matriciellement par  $A^{-1}$ .

*III. 3 Calcul du noyau et de l'image d'une application linéaire grâce aux matrices.*

**Proposition 37.** Soient  $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  et  $f_A$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

Résoudre le système linéaire  $AX = 0$ , c'est déterminer .....

- Exercice 38.** 1. Étude du noyau de l'application linéaire  $f$  canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
2. Étude du noyau de l'application linéaire  $g$  canoniquement associée à  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**❶ Méthode 1 : Matriciellement en utilisant une famille génératrice**

**Proposition 39.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E = \mathbb{K}^n$  et  $F = \mathbb{K}^p$ .  
Si  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  alors

Soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une base de l'espace de départ : alors  $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , donc :

- Les colonnes de la matrice donnent une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .

- On étudie alors la liberté de la famille  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ .
- On enlève les éventuelles relations de liaison entre les vecteurs pour obtenir à la fin une base de  $\text{Im}(f)$ .

**② Méthode 2 : Matriciellement en utilisant la définition de l'image**

**Proposition 40.** Soient  $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  et  $f_A$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

$v \in \text{Im}(f) \iff \dots\dots\dots$  revient à résoudre matriciellement

**Exercice 41.** Déterminer une base et la dimension de l'image de  $f$  lorsque  $f$  est l'application linéaire canoniquement associée à

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

## IV Rang d'une application linéaire

### IV.1 Définition du rang d'une application linéaire

**Définition 42.** Soient  $E = \mathbb{K}^n$  et  $F = \mathbb{K}^p$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Le rang de  $f$  est  $\dots\dots\dots$

**Rappels :**

- Rang d'un système linéaire :  $\dots\dots\dots$
- Rang d'une matrice :  $\dots\dots\dots$
- Rang d'une famille de vecteurs :  $\dots\dots\dots$

**Proposition 43.** Le rang de  $f$  est égal au  $\dots\dots\dots$

**Méthodes pour calculer le rang d'une application linéaires :**

- Méthode 1 : par la définition en calculant la dimension de l'image de  $f$ .
- Méthode 2 : en calculant le rang de la matrice canoniquement associée à  $f$  par le pivot de Gauss.

**Exercice 44.** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1.  $f(x, y, z) = (x + 2y + z, -3x + y + 4z, -3x + 4y - 5z)$
2.  $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x, x + y, x + z)$

Conséquence : Méthode rapide pour déterminer une base et la dimension de l'image de  $f$

- On calcule le rang  $r$  de la matrice associée à  $f$  par le pivot de Gauss. Cela nous donne le rang de  $f$ .
- On cherche  $r$  vecteurs libres parmi les colonnes de la matrice associée.
- On a ainsi trouvé  $r$  vecteurs libres qui sont dans  $\mathfrak{Im}(f)$ , donc on a trouvé une base de  $\mathfrak{Im}(f)$ .

**Exercice 45.** 1. Soit  $f$  l'application canoniquement associée à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Base et la dimension de l'image ?

2. Déterminer le rang et une base de l'image des endomorphismes de  $\mathbb{R}^4$  dont les matrices dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

#### IV. 2 Théorème du rang et conséquences

**Proposition 46** (Théorème du rang). Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  de dimension finie. On a :

**Si on connaît le noyau :**

- Par le théorème du rang : on en déduit le rang de  $f$ .
- En regardant les colonnes de toute matrice associée à  $f$ , on obtient une base de l'image de  $f$ .

**Si on connaît le rang de  $f$  :**

Par le théorème du rang :

On en déduit la dimension du noyau.

**Exercice 47.** 1. Soit l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par :  $f(x, y, z) = (x + y - z, x - 2y - 2z, x - 5y - 3z)$ . Donner la dimension et une base du noyau et de l'image de  $f$ .

2. Même chose pour  $f$  l'application canoniquement associée à la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 48.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (avec  $E$  de dimension finie).

**Preuve**

**Remarques.** •  L'hypothèse que  $f$  soit un endomorphisme est essentielle.

- De plus, l'hypothèse :  $E$  de dimension finie sera essentielle en BCPST2 où vous étudierez aussi des espaces vectoriels de dimension infinie.
- Ainsi ce théorème assure que pour les endomorphismes en dimension finie, on a équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.

- Exercice 49.** 1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Déterminer les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$  n'est pas injective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer  $\ker(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3})$ .
2. On considère la matrice  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & 16 & 12 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ . On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . Déterminer, selon les valeurs de  $\lambda$ , le rang de la matrice  $A - \lambda I_3$ . En déduire que :  $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$  non bijectif si et seulement si  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ .