

Table des matières

I Généralités sur les variables aléatoires réelles finies	1
I. 1 Définition et notations	1
I. 2 Loi d'une variable aléatoire réelle finie	2
I. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie	3
I. 4 Composée d'une variable aléatoire réelle finie : $Y = g(X)$	4
II Moments d'une variable aléatoire réelle finie	4
II. 1 Espérance d'une variable aléatoire réelle finie	4
II. 2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle finie	5
II. 3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	6
III Lois usuelles	6
III. 1 Loi uniforme	6
III. 2 Loi de Bernoulli	7
III. 3 Loi binomiale	8
IV Indépendance de var	9
IV. 1 Indépendance de deux var	9
IV. 2 Généralisation : indépendance de n var	10

Chapitre 20 : Variables Aléatoires Réelles

Dans tout ce chapitre, on se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

I Généralités sur les variables aléatoires réelles finies

I. 1 Définition et notations

Définition 1. On appelle variable aléatoire réelle finie sur Ω , notée varf, toute application de Ω dans \mathbb{R} .

Exemple 1. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, donner l'univers Ω et un exemple de varf sur Ω .

1. On lance une pièce de monnaie deux fois de suite, et à chaque lancer on gagne un euro si on obtient pile, on perd 2 euros si on obtient face.

$$G \left| \begin{array}{ll} \llbracket P, F \rrbracket & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto 1 \\ F & \mapsto -2 \end{array} \right.$$

2. On lance deux dés non truqués de couleurs différentes.

$$S \left| \begin{array}{ll} \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (i, j) & \mapsto i + j \end{array} \right.$$

Définition 2. On appelle univers image d'une varf, noté $X(\Omega)$ l'ensemble des images de l'application Ω .

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Exemple 2. Donner les univers images pour les 2 exemples précédents.

Remarque. En BCPST1, on ne travaille que sur des univers Ω finis.

Notations : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note :

- $[X = a] = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$
- $[X \leq a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$
- $[X \geq a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$
- $[X < a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$
- $[X > a] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$

Soit $A \subset \Omega$ on note :

- $[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Comme ce sont des événements, on peut calculer leur probabilité.

Exemple 3. On reprend le deuxième exemple. Calculer $P([Y = 5])$, $P([Y \geq 10])$, $P([1 \leq Y < 5])$, $P([Y > 12])$.

Exercice 3. Soit X une varf et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $P([X \leq a])$ en fonction de $P([X \geq a])$.

Proposition 4. Système complet d'évènements associé à une varf

- Si X est une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors $\bigcup_{i=1}^n [X = x_i]$ est un sce.
- En particulier, on a

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P([X = x])$$

Exemple 4. Donner le sce associé dans les exemples du début.

I. 2 Loi d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 5. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle loi de probabilité de X notée f_X l'application

$$f_X \left| \begin{array}{l} X(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P([X = x]) \end{array} \right.$$

Déterminer la loi de probabilité de X :

- Donner l'univers image $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.
- Pour chaque élément x de $X(\Omega)$, calculer sa probabilité $P(X = x)$:

Calculs de $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, $P(X = x_3)$, \dots , $P(X = x_n)$.

Exemple 5. Donner les lois des varf des exemples du début.

Deux représentations sont utilisées pour définir la loi d'une var :

- **Sous la forme d'un tableau**
- **Sous la forme d'un diagramme en bâtons**

Exemple 6. Donner les deux représentations graphiques possibles pour les exemples du début.

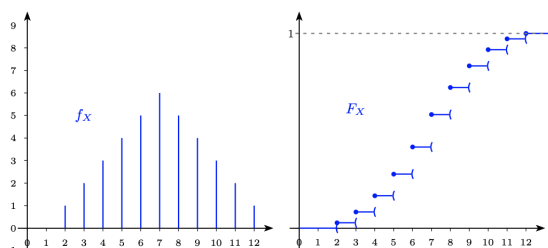
I. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 6. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X notée F_X l'application

$$F_X \left| \begin{array}{l} X(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto P([X \leq x]) \end{array} \right.$$

Exemple 7. Calculer la fonction de répartition F_X pour les 2 exemples du début. Faire de plus à chaque fois la représentation graphique de F_X .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x) = P(X=x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F_X(x) = P(X \leq x)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$



Proposition 7. Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition alors :

1. F est croissante.
2. F est continue à droite en tout point de \mathbb{R} .
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

De plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{z \leq x, z \in X(\Omega)} P(X = z)$$

Lien entre la fonction de répartition et la loi D'après la propriété ci-dessus, on remarque que si l'on connaît la loi de X , on peut calculer la fonction de répartition de X . Mais la réciproque est vraie aussi. Si on connaît la fonction de répartition de X , on peut en déduire la loi de X . Cela peut être utile lorsqu'il est plus facile de déterminer la fonction de répartition que la loi.

Proposition 8. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors on a :

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Démonstration. □

Exercice 9. Un joueur prélève successivement et avec remise n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On considère les varf X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules tirées. Donner les univers images de X et de Y . Calculer la fonction de répartition de X . En déduire la loi de X . Calculer ensuite pour tout $k \in Y(\Omega) : P([Y > k])$. En déduire la loi de Y .

Penser à passer par la fonction de répartition pour obtenir la loi de var définie avec des min ou des max.

I. 4 Composée d'une variable aléatoire réelle finie : $Y = g(X)$

Si X est une variable aléatoire finie et g une fonction numérique dont l'ensemble de définition contient $X(\Omega)$, on peut étudier la variable aléatoire $Y = g(X)$.

Méthode pour étudier les var de type $Y = g(X)$:

- Calcul de l'univers image $Y(\Omega)$: Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ alors $Y(\Omega)$ s'obtient en calculant $g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots, g(x_n)$.
- Calcul de la loi de $Y = g(X)$: Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on écrit que : $P([Y = y]) = P([g(X) = y])$, et on se ramène alors à X .

Exercice 10. Reprendre l'exemple 1 du début et étudier $U = Z^2 - Z - 2$.

II Moments d'une variable aléatoire réelle finie

II. 1 Espérance d'une variable aléatoire réelle finie

On s'intéresse ici à la moyenne d'un phénomène aléatoire. Mais la moyenne au sens arithmétique semble sans intérêt car certaines valeurs ont une probabilité plus forte que d'autres d'arriver. On va ainsi s'intéresser à une moyenne pondérée par la probabilité qu'a la valeur d'arriver.

Définition 11. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- On appelle espérance de X notée $E(X)$ le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

- Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite centrée.

Exemples. • Si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X) = \sum_{i=1}^n iP(X = i)$

- Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 2\}$ alors $E(X) = -3P(X = -3) - P(X = -1) + P(X = 1) + 2P(X = 2)$
- Si X est une varf constante égale à a : $X = a$, alors $E(X) = a$

Remarque. L'espérance est ainsi la moyenne de chacune des valeurs prises par la variable aléatoire X pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Exemple 8. Calculer l'espérance dans chacun des exemples du début.

Théorème de transfert

Théorème 12. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $Y = g(X)$. Alors, on a

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n g(x_i)P(X = x_i)$$

Exemples. • Si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^2) = \sum_{i=0}^n i^2 P(X = i)$

- Si $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ alors $E(\ln(X)) = \sum_{i=1}^6 \ln(i)P(X = i)$
- Si $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}$ fixé alors $E(X^3) = \sum_{i=1}^n i^3 P(X = i)$

Exercice 13. Reprendre l'exercice 3 et calculer l'espérance des varf X, Y, Z et T .

Penser au théorème de transfert pour calculer l'espérance de var de type $Y = g(X)$ avec X connu.

Définition 14. Soit X une varf avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k de X , noté parfois $m_k(X)$, le nombre réel :

$$m_k(X) = E(X^k) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i^k P(X = x_i)$$

Exercice 15. Calculer les moments d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la var X dont la loi est définie dans l'exercice 3.

Linéarité de l'espérance

Proposition 16. Linéarité de l'espérance :

- Soit X une var et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

- Soient X_1, X_2, \dots, X_n des var et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

Démonstration. Démontrons que $E(aX + b) = aE(X) + b$. □

Exercice 17. On considère r boules numérotées de 1 à r et n tiroirs numérotés de 1 à n . On place au hasard chacune des r boules dans l'un des n tiroirs, chaque tiroir pouvant contenir 0, 1 ou plusieurs boules. On note V la var égale au nombre de tiroirs restés vides. Déterminer l'espérance de V .

II. 2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 18. Soit X une variable aléatoire finie. On appelle variance de X , notée $V(X)$, le nombre réel défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Remarque. La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et de sa moyenne $E(X)$. Ainsi, la variance mesure l'écart entre X et sa moyenne c'est-à-dire la dispersion de la var X .

Formule de Koenig-Huygens En pratique, on n'utilise quasiment jamais la définition de la variance pour calculer la variance car cela entraîne des calculs compliqués. Ainsi, dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens donnée ci-dessous pour calculer la variance.

Proposition 19. Soit X une variable aléatoire finie.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration. □

Exemple 9. Calculer la variance dans chacun des 2 exemples du début.

Méthode pour calculer la variance : utiliser la formule de Koenig-Huygens :

- Étape 1 : calculer l'espérance $E(X)$.
- Étape 2 : calculer en utilisant le théorème de transfert $E(X^2)$.
- Étape 3 : conclure en utilisant la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Proposition 20. Soit X une variable aléatoire finie et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $V(X) \geq 0$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$
- En particulier on a : $V(X + b) = V(X)$

Définition 21. Soit X une variable aléatoire finie. On appelle écart-type de X le nombre réel noté σ le nombre

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

- Exemple 10.**
- Une var d'espérance nulle et d'écart-type (ou de variance) égal à 1 est dite réduite
 - Si X est une var d'espérance m et d'écart-type σ alors $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est une var centrée réduite. En effet :

II. 3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Cette inégalité permet de donner une estimation de l'écart de la variable aléatoire avec son espérance.

Proposition 22. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire finie, et $\varepsilon > 0$. On a alors :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. Intuitivement, on obtient que la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieur à ε est majorée par $\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$. On remarque que :

- pour ε grand (un grand écart avec l'espérance), la probabilité est très petite.
- pour ε petit (un petit écart avec l'espérance), l'inégalité peut ne pas être utile, en particulier si $\frac{V(X)}{\varepsilon^2} > 1$.

Exercice 23. On lance n fois de suite un dé équilibré.

1. Soit X le nombre d'apparition du nombre 6. Quelle loi suit X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Soit Y la fréquence d'apparition du nombre 6. Exprimer Y en fonction de X , et donner son espérance et sa variance.
3. Soit p_n la probabilité que Y soit proche de $\frac{1}{6}$ à 0.1 près. Combien de lancers doit-on effectuer pour que p_n soit supérieur à 0.9 ?

III Lois usuelles

III. 1 Loi uniforme

Modélisation type

- Lancer d'un dé équilibré à 6 faces. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{6}$$

- Autres exemples :

★ Tirer une boule dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On note X la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu. On obtient

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{N}$$

Schéma uniforme :

Expériences dont toutes les issues sont équiprobables.

Définition 24. Soit X une var.

- Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: On dit que X suit la loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

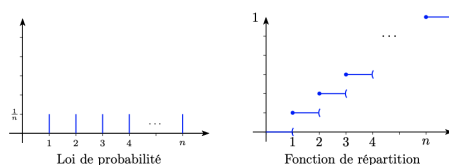
On note alors $X \sim U(n)$

- Cas particulier où $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim U(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Représentation graphique



Proposition 25. Soit X une var.

- Si $X \hookrightarrow U(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) =$$

- Si $X \hookrightarrow U(X(\Omega))$ avec $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$ avec $a < b$, alors :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Démonstration.

□

III. 2 Loi de Bernoulli

Modélisation type Modélisation type :

Une pièce truquée possède p chances de tomber sur pile (succès) et $q = 1 - p$ chances de tomber sur face (échec). On définit la VARF X qui teste si pile est sortie : X vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon.

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

Schéma de Bernoulli :

Expériences n'ayant que 2 résultats possibles : succès ou échec.

Loi

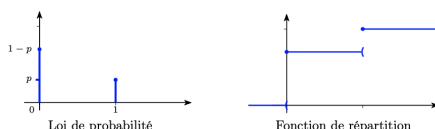
Définition 26. Soit X une var et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$P(X = 1) = p \quad P(X = 0) = 1 - p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemples. • Soit $A \subset \Omega$ alors la loi 1_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

Représentation graphique



Proposition 27. Soit X une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$. Alors

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p) = pq$$

III. 3 Loi binomiale

Modélisation type

- Exemple 1 On dispose d'une urne avec N boules, R rouges et $N - R$ jaunes. On effectue n tirages successifs avec remise, la probabilité d'obtenir exactement k boules rouges parmi les n tirages est

★ $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

★ Loi de X :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{R^k (N - R)^{n-k}}{N^n}$$

- Exemple 2 (Schéma binomial) On effectue n lancers d'une pièce non équilibrée satisfaisant $P(\text{pile}) = p$ et $P(\text{face}) = q$ on effectue n lancers et X correspond au nombre de pile on obtient :

★ $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

★ Loi de X :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

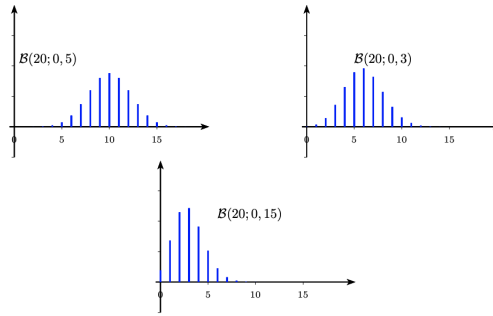
Loi

Définition 28. Soient X une var, $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim B(n, p)$ ou $X \hookrightarrow B(n, p)$

Représentation graphique



Proposition 29. Soit X une var avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) = npq$$

IV Indépendance de var

IV. 1 Indépendance de deux var

Définition

Définition 30. Soient X et Y deux var. On dit que X et Y sont indépendantes si :

Exercice 31. 1. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On en tire 2 successivement avec remise. Soient X le numéro du premier jeton, et Y le numéro du second. Étudier l'indépendance de X et Y .
2. Reprendre l'exercice précédent avec deux tirages sans remise.

Conséquence sur les trois types de lois

Proposition 32. Soit (X, Y) un couple de var. Il y a équivalence entre :

- Les var X et Y sont indépendantes.
- $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$,
- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$,

Proposition 33. (X, Y) couple, espérance et variance de $X + Y$ et XY .

Lemme des coalitions

Proposition 34. Soient X et Y deux var indépendantes.

Alors $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendants.

Exemples. Si X et Y sont indépendantes, alors, par exemple

-
-

IV. 2 Généralisation : indépendance de n var

Définition 35. Soient X_1, \dots, X_n n var. Elles sont mutuellement indépendantes si :

Remarques. • On vous demandera rarement de montrer que des var sont mutuellement indépendantes. C'est plutôt une donnée de l'exercice qui permet de faire le calcul de la probabilité d'intersections d'événements.

• Exemples types de modèles donnant des var mutuellement indépendantes :

- ★
- ★
- ★ De façon générale :

Proposition 36. Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_p$ des var mutuellement indépendantes.

Alors :

-
-

Exemples. Si X, Y, Z, T sont mutuellement indépendantes, alors, par exemple

-
-