Programme de colle : Semaine 27
Lundi 22 mai

I Variable aléatoire réelle finie

1. Définition d'une VAR finie.
2. Loi et fonction de répartition.
3. Espérance, variance, formule de Koenig-Huygens.
4. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev.
5. Lois usuelles : Uniforme (formule de l'espérance à connaitre pas celle de la vairance), Bernouilli et binomiale (espérance et variance à connaitre).
6. Indépendance de VAR.

II Espaces Vectoriels

On ne considére seulement l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les sev de $\mathbb{K}^n$.

1. Savoir vérifier qu'un sous-ensemble est un sev de $\mathbb{K}^n$.
2. Notion de famille de vecteurs et de sev engendré par une famille de vecteurs $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$
3. Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs.
4. Passer d'une écriture cartésienne à une écriture paramétrique (et vice versa)
5. Famille libre, génératrice d'un sev, base.
6. Dimension.
7. Rang d'une famille de vecteurs.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Savoir utiliser le module random (notamment rd.random() et rd.randint(a,b))

IV Exercices Types

1. L'ensemble F suivant est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + 2y - t = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 9z = 1\right\}.$$
2. Trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel suivant
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$$
3. Donner l'écriture cartésienne de l'espace vectoriel suivant $E = \mathrm{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.
4. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que $u = (m, 1, m)$ appartient à $\mathrm{Vect}(v, w)$ avec $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, m, -1)$.

5. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\}$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\}.$$

6. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   (a) $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
   (b) $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
   (c) $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
   (d) $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$

7. (a) $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
   (b) $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

8. Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner le rang de la famille $((m, 2, 3), (-1, m - 3, -3), (2, 4, m + 5))$.
9. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.
10. On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.
    (a) Calculer la loi de X. Représenter cette loi par un tableau puis par un diagramme en bâtons.
    (b) Calculer la fonction de répartition de X.
    (c) Calculer son espérance et sa variance.
    (d) Déterminer la loi de la varf $Y = (X - 3)^2$.
    (e) On considère $g : x \mapsto \cos(\pi x)$ et on pose $Z = g(X)$. Déterminer l'espérance de la varf Z.
11. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
    (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
    (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
    (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
12. Deux joueurs jouent n fois chacun à pile ou face.
    (a) Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.
    (b) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne un nombre de piles strictement plus grand que l'autre.