Programme de colle : Semaine 28
Mardi 1 juin

I Applications Linéaires

1. Définition, exemples. (On se restreindra au cadre des applications de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. Noyau et image.
3. Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
4. Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
5. Lien Noyau/Image et Injectivité/surjectivité.
6. Application bijective / matrice inversible.
7. Rang d'une application linéaire.
8. Théorème du rang.

II Variable aléatoire réelle finie

1. Définition d'une VAR finie.
2. Loi et fonction de répartition.
3. Espérance, variance, formule de Koenig-Huygens.
4. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev.
5. Lois usuelles : Uniforme (formule de l'espérance à connaitre pas celle de la vairance), Bernouilli et binomiale (espérance et variance à connaitre).
6. Indépendance de VAR.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Obtention maximum/minimum sur une liste.
2. Tri par selection, tri par insertion.
3. Approximer une intégrale à l'aide des sommes de Riemann.
4. Savoir utiliser le module random (notamment rd.random() et rd.randint(a,b))

IV Exercices Types

1. Pour chacune des applications linéaires suivantes, décrire l'image et le noyau, en déduire si elles sont injectives, surjectives.
   — $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$
   — $f(x, y) = (4x + y, x - y, 2x + 3y)$
   — $f(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + 2z, x + 5y - 4z)$
2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

   définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Comment choisir λ pour que f soit surjective ? Injective ? Comment choisir λ pour que f soit un automorphisme ?

3. On considère f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrices relativement à la base canonique $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   — Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.
   — Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ et donner une base de $\operatorname{Im} f$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im} g$.
   — On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?
4. On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.
5. On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.
   (a) Calculer la loi de X. Représenter cette loi par un tableau puis par un diagramme en bâtons.
   (b) Calculer la fonction de répartition de X.
   (c) Calculer son espérance et sa variance.
   (d) Déterminer la loi de la varf $Y = (X-3)^2$.
   (e) On considère $g : x \mapsto \cos(\pi x)$ et on pose $Z = g(X)$. Déterminer l'espérance de la varf Z.
6. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
   (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
   (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
   (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
7. Deux joueurs jouent n fois chacun à pile ou face.
   (a) Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne un nombre de piles strictement plus grand que l'autre.