DM 14

Equation dans $\mathcal{L}(E)$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

Un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y,-x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner la matrice de g, notée A, dans la base canonique.
3. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
4. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et donner une base de F et une base de G.
5. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
6. Soit $u = (1,-1)$ et $v = (-2,1)$ Montrer que $B = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Calcul de g^n
7. Premiere méthode
   (a) Donner la matrice de g, notée D, dans la base B
   (b) Donner la matrice, notée P, de l'identité relativement aux bases B au départ et la base canonique à l'arrivée.
   (c) Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}AP$.[1]
   (d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n et l'expression de g^n.
8. Deuxième Méthode
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x,y) comme combinaison linéaire de u et v.
   (b) Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
   (c) Donner finalement l'expression de $g^n(x,y)$ en fonction de x et y.
   (d) Donner la matrice de g^n dans la base canonique.

Etude de f On se place à nouveau dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Etude des puissance de f On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.

1. (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.

1. J'ai pas encore tapé le corriger donc si vous obtenez pas D, essayez de calculer PAP^{-1}, mais je crois que c'est bon comme ca...